

## An Analysis of the Introduction of the Concept of Derivative in Second-Year High School Mathematics Textbooks based on Peirce's Theory of Semiotics Over the Past 45 Years

Ebrahim Reyhani<sup>1\*</sup>, Saeid Haghjoo<sup>2</sup>

پذیرش مقاله: ۱۴۰۴/۰۹/۱۱

دریافت مقاله: ۱۴۰۰/۱۲/۰۷

Accepted Date: 2025/12/02

Received Date: 2022/02/26

### Abstract

**Introduction:** The purpose of this study is to analyze the content of Iranian mathematics textbooks to introduce the concept of the derivative at a point during a period of 45 years (1980–2024). Textbooks are one of the main sources for teaching and are often used by students to learn mathematics. In Iran, the Ministry of Education is responsible for developing national textbooks. They form a team of senior mathematics lecturers, teachers, and mathematics educators to work closely together to develop such textbooks. Numerous studies focused on how teaching and learning derivatives could be improved due to their specific importance in mathematics and its applications in a wide range of disciplines. However, students in many countries still face various difficulties in understanding this concept. Part of these difficulties might be related to the approaches taken by textbooks for introducing this topic. Semiotics can be defined as knowledge or branch assessing signs and sign systems. Peirce defined a sign as a thing that is regarded as the symptom of something else for a person on a specific occasion or special topic. Signs play an important role in presenting and understanding mathematical concepts.

**Theoretical framework:** Peirce provided different classifications based on sign users, among which the most important one, based on the relationship between sign and object as icons, index, and symbol, was used in this section. Icon: There is a similarity between a sign and an object for example a person's photo. Index: A sign that is related to an object. Signs and objects should be related and a casual and natural relationship should be found between them such as the implication of smoke in a fire. The index itself consists of several icons. Arranging icons that are based on the hierarchy of Peirce's semantics is considered one of the important aspects of indexes. Symbol: A sign that needs an interpreter. Regarding symbols, the relationship between sign and object is contractual such as code. Peirce's theory can be used to show the importance of signs, how objects are represented by sign vehicles, how signs are

<sup>1</sup> . Associate Professor, Shahid Rajaee Teacher Training University, Tehran, Iran.

\* (Corresponding author)

Email: e\_reyhani@sru.ac.ir

<sup>2</sup> .<sup>2</sup> PhD in Mathematics Education, Shahid Rajaee Teacher Training University; Lecture of Persian Gulf University, Bushehr, Iran.

intertwined and interpreted, and how they relate to and mean by signs. A mathematical concept, like a derivative, is not independent of its representations. Therefore, the construction of concepts is determined by the signs, so the signs play a primary role in presenting and correcting mathematical concepts. According to this semiotic view, we can consider that conceptualization and semantics are done by the connection between the three components of the sign. Like other sign vehicles, mathematical sign vehicles can only represent some aspects of a mathematical object, but all its properties and properties do not show at the same time, they bring some to the background and keep some in the background. As a result, the process of conceptualizing and constructing the meaning of mathematical objects can be considered a recursive process mediated by a variety of mathematical cues. This view led us to consider semiotics as a successful tool for analyzing the concept of derivation in mathematics textbooks. The math symbols used in the textbooks are mainly used as tools for coding and describing mathematical objects, for operations with these objects, as well as the communication of mathematical knowledge between teachers and students. As a result, the way mathematical symbols are presented and communicated in textbooks may activate or limit the process of derivation conceptualization.

**Methodology:** The research method is deductive qualitative content analysis. The unit of analysis is all the examples, activities, exercises, text, and pictures related to the textbook derivative chapter in both mathematics-physics and experimental sciences majors (Year 11 & Year 12). Because of applying the recent Calculus II textbook in the current educational system, was used in the present study to assess introducing derivative concepts based on Peircean theory. This textbook studied the topics of functions, trigonometry, infinite limits, derivatives, and applications of derivatives in five chapters and 152 pages. Since the authors mentioned in the introduction that this textbook emphasized understanding concepts, the present study highlighted the pattern of introducing a derivative concept which was presented in Chapter 4 named derivative and involved 40 pages. The validity of the measurement tool has been confirmed by three experts in mathematics education and its reliability has been done by reviewing two evaluators and 100% agreement.

**Results:** The first chapter of the textbook provided ideas and considerations about tangents. Additionally, intuitive concepts, definitions, some of the features, and techniques of calculating limits and properties of continuous functions are provided in the textbook. Lessons 1-3 regarding the derivative concepts were analyzed in the present study. The present exploratory and interpretive study aimed to analyze relevant components concerning a semiotic perspective to provide a derivative concept. This analysis aimed to assess how the mathematical signs existing in the Calculus II textbook were provided and connected. Some points about the possibility of activating or limiting students were used for conceptualizing derivatives in the present study. Further, the pattern of interpreting and understanding these signs during the use of textbooks was considered. The considerations of the present study on textbooks were classified into three classes and provided in the following parts. For this purpose, Pierce's semiotic framework is used, and in particular, his classification of sign vehicles is discussed. The sign vehicles associated with the concept of the derivative may be iconic, index, or symbolic. The authors have used a special

classification of the icon (visual or graphical and metaphorical) and index (numerical, formula, and graphical) of Peirce's framework.

**Discussion:** Among of 14 textbooks reviewed, only 3 textbooks had both graphic or pictorial images and metaphors; Also, only 4 textbooks had all three numerical, formula, and graphical indexes. Calculus II and Mathematics III in Conceptualization of the Derivative at a Point became more compatible with Peirce's theoretical framework of semiotics in presenting a derivative at a point than other textbooks. New textbooks on the subject of the derivative at a point have provided appropriate teaching and learning opportunities for students to learn meaningfully, With the help of the semiotics package.

**Keywords:** Derivative, Sign, Peirce's semiotics, Mathematics textbooks, Content analysis.

## تحلیلی بر معرفی مفهوم مشتق در کتاب‌های درسی ریاضی دوره دوم متوسطه با تکیه بر نظریه نشانه‌شناسی پیرس در طی ۴۵ سال

ابراهیم ریحانی<sup>۱</sup>، سعید حق‌جو<sup>۲\*</sup>

### چکیده

**هدف:** هدف از این پژوهش، تحلیل محتوای کتاب‌های درسی ریاضی ایران جهت بررسی چگونگی ارائه مفهوم مشتق در طول یک دوره ۴۵ ساله (۱۴۰۲-۱۳۵۸) می‌باشد.

**روش:** روش پژوهش تحلیل محتوای کیفی از نوع قیاسی است. واحد تحلیل تمام محتوای مربوط به فصل مشتق کتاب‌های درسی دوره دوم متوسطه نظری در دو رشته ریاضی و تجربی (پایه‌های یازدهم و دوازدهم یا پیش-دانشگاهی) می‌باشد. برای این منظور از چارچوب نشانه‌شناسی پیرس استفاده شده، و به طور خاص به طبقه‌بندی او از ابزار علامت‌ها پرداخته می‌شود. ابزار علامت‌ها در ارتباط با مفهوم مشتق ممکن است شمایی، نمایه‌ای یا نمادین باشند. مفهوم مشتق در یک نقطه در ۸ کتاب رشته ریاضی و ۶ کتاب رشته تجربی که در چرخه تدریس قرار داشته‌اند، تحلیل شده است. نویسندگان دسته‌بندی خاصی از شمایل و نمایه چارچوب پیرس به کار برده‌اند. روایی ابزار اندازه‌گیری توسط سه متخصص آموزش ریاضی تأیید شده و پایایی آن با بررسی دو ارزیاب و توافق ۱۰۰٪ صورت گرفته است.

**یافته‌ها:** نتایج نشان می‌دهد که از ۱۴ کتاب مورد بررسی فقط ۳ کتاب هر دو شمایل نموداری یا تصویری و استعاره‌ای را با هم داشتند؛ همچنین فقط ۴ کتاب هر سه نمایه‌های عددی، ضابطه‌ای و نموداری را توأمان داشتند. کتاب حسابان ۲ و ریاضی ۳ در مفهوم‌سازی مشتق در یک نقطه با چارچوب نظری نشانه‌شناسی پیرس در ارائه مشتق در یک نقطه نسبت به سایر کتاب‌ها سازگارتر شناخته شده است. کتاب‌های درسی جدید در مبحث مشتق در یک نقطه فرصت‌های یاددهی و یادگیری مناسبی را برای شاگردان جهت یادگیری معنادار به کمک بسته نشانه‌شناسی فراهم کرده‌اند.

**کلیدواژه‌ها:** مشتق، نشانه، نشانه‌شناسی پیرس، کتاب‌های درسی ریاضی ایران، تحلیل محتوا.

<sup>۱</sup> . دانشیار آموزش ریاضی، دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران، ایران.

Email: e\_reyhani@sru.ac.ir

\* (نویسنده مسئول):

<sup>۲</sup> دانش‌آموخته دکتری آموزش ریاضی، دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران، ایران، و مدرس دانشگاه

خلیج فارس، بوشهر، ایران.

## مقدمه

مفهوم مشتق دارای جایگاه ویژه‌ای در ریاضیات است و در علوم مختلف مانند مهندسی، فیزیک و اقتصاد کاربردهای زیادی دارد (e.g. Zandieh, 2000; Gloria Sánchez-Matamoros & Ceneida, 2019; Fernández & Salvador Llinares, 2019; Fuedel, 2019). بررسی‌ها نشان می‌دهند که دانش-آموزان و دانشجویان در کشورهای مختلف در درک این مفهوم با مشکلات فراوانی روبرو هستند (e.g. Haghjoo & Reyhani, 2020; Haghjoo & Reyhani, 2021; Zandieh, 2000; Tabatabaei et al., 2020; Ahmadrash & Mostafazadeh, 2019; Jones & Watson, 2018). به همین دلیل مطالعات بسیاری در مورد آن در آموزش ریاضی صورت گرفته است (e.g. Biza, 2021; Haghjoo & Reyhani, 2022). بخشی از این مشکل به رویکرد کتاب‌ها در معرفی و بسط این مفهوم مرتبط است (Kilpatrick, 2014).

پژوهش‌های بسیاری روی تجزیه و تحلیل کتاب‌های درسی برای بهبود یاددهی و یادگیری شاگردان انجام شده است (e.g. Artigue et al., 2007; Sarkhosh et al., 2021; Mesa, 2010). برخی از آن‌ها به این نتیجه رسیده‌اند که امروزه کتاب‌های درسی ریاضی از نظر محتوای ریاضی و پداگوژی، حامی معلم هستند (Kilpatrick, 2014). برخی از محققان مشخصه‌هایی از کتاب‌های درسی را بررسی کرده‌اند، مانند این که چگونه شاگردان با مسائل کتاب برخورد می‌کنند، نوع تکالیف ارائه شده پس از تعاریف، و این که چه چیزی در یک تکلیف خاص ریاضی ارائه شده است و یا چگونه به دانش‌آموزان فرصت می‌دهند تا درگیر مطالب کتاب شوند (e.g. Mesa, 2010; Coruhlu & Pehlevan, 2021). همچنین مطالعات زیادی روی تجزیه و تحلیل کتاب‌های درسی ریاضی در مقاطع ابتدایی و متوسطه (e.g. Huntley & Terrell, 2023; Haghjoo et al., 2023; Mehdezadeh et al., 2014; González-Martín et al., 2011) انجام شده است. در این مطالعات، جنبه‌های مختلف تکالیف (یا مسائل) کتاب درسی، مانند زمینه (به عنوان مثال ریاضیات واقعیت‌مدار)؛ نوع پاسخ (به عنوان مثال، پاسخ عددی یا توضیحی)؛ نیازهای شناختی و فراشناختی (مثلاً حفظ‌کردنی، رویه‌های بدون اتصال، و رویه‌های با اتصال)؛ و شکل بازنمایی (مانند نمادین، کلامی، بصری و ترکیب آن‌ها) بررسی شده است. به عنوان نمونه، اخیراً، اوزگلدی و آیدین (Özgeldi & Aydın, 2021) مثال‌هایی را در سه کتاب درسی حساب دیفرانسیل و انتگرال بر حسب شش شایستگی ریاضی (یعنی ارتباطات، اجرای راهبردها، ریاضی‌ورزی، بازنمایی، استفاده از نمادها، عملیات و زبان رسمی، و استدلال و اثبات) ارزیابی کرده‌اند. علاوه بر این، نحوه تحلیل محتوا در کتاب‌های درسی ریاضیات با استفاده از چارچوب‌های نظری مختلف، مانند نشانه‌شناسی پیرس<sup>۱</sup> (Almida & Silva, 2018)، نظریه رجیسترهای بازنمایی نشانه‌شناسی دوآل<sup>۲</sup> (González-Martín et al., 2011)، و نظریه

<sup>1</sup> Pierce's semiotics

<sup>2</sup> Duval's theory of registers of semiotic representation

گفتمان شناختی اسفارد<sup>۱</sup> (e.g. Morgan & Sfard, 2016; Haghjoo et al., 2023) و یا با طبقه‌بندی سولو<sup>۲</sup> (e.g. Mulbar et al., 2017; Haghjoo & Reyhani, 2019) انجام شده است. در طی یک دهه تالیف کتاب‌های درسی ریاضی مدرسه‌ای با تغییرات ساختاری مهمی همراه بوده است. مولفین مقاله تجربه تدریس کتاب‌های قبلی و فعلی را به ویژه در دوره دوم متوسطه داشته‌اند و ضمن آشنایی با نقاط ضعف و قوت کتاب‌های قبلی، با تحولات صورت گرفته به طور دقیق آشنا هستند. تبیین تغییرات صورت گرفته و مقایسه کتاب‌های گذشته و حال بر مبنای یک چارچوب دقیق، می‌تواند این امکان را فراهم نماید تا دلالت‌های آموزشی با ارزشی برای جامعه آموزش ریاضی به دست آید. در ادامه به صورت مختصر به وضعیت تألیف کتاب‌های درسی ریاضی در ایران می‌پردازیم.

فرآیند تألیف کتاب‌های جدید درسی ریاضی توسط وزارت آموزش و پرورش در ایران از پایه اول ابتدایی تا پایه دوازدهم در سال ۱۳۹۷ با تألیف کتاب‌های پایه دوازدهم به پایان رسید. بررسی اسامی مؤلفان در شناسنامه کتاب‌های درسی نشان می‌دهند که در دهه‌های گذشته به طور عمده نویسندگان این کتاب‌ها ترکیبی از اساتید خبره دانشگاه در کنار دبیران ریاضی با تجربه بوده‌اند. شاید متأثر از این موضوع در رویکرد حاکم بر کتاب‌های درسی بیشتر توجه به محتوای ریاضی بوده است و توجه به فرآیندهایی مانند «حل مسئله، استدلال و اثبات، طرح مسئله، حل مسئله باز پاسخ و مانند آن» کمتر مد نظر بوده است. در دهه اخیر با حضور مؤثر آموزشگران ریاضی در کنار اساتید ریاضی و نیز دبیران با تجربه ریاضی ترکیب مناسبی برای تیم‌های تألیف فراهم شد و با رشد پژوهش‌ها و تحقیقات در حوزه آموزش ریاضی و بهره‌گیری از تجربیات بین‌المللی تغییرات اساسی در تألیف کتاب‌های درسی در ایران اتفاق افتاد. مطالعه این تغییرات و ارائه نتایج آن از جهات گوناگون می‌تواند برای جامعه آموزش ریاضی مفید باشد. لازم به ذکر است که نظام آموزشی در ایران یک نظام متمرکز است و کتاب‌های درسی نقش بسیار ویژه‌ای در روند آموزش دارند. در طی دهه‌های اخیر، نشانه‌شناسی توجه بسیاری از محققان آموزش ریاضی را به خود جلب کرده است و در میان آن‌ها اجماعی وجود دارد که اشیاء ریاضی ایده‌آل و انتزاعی هستند، ماهیت طبیعی داشته، و لازم است که از ابزار علامت‌ها<sup>۳</sup> برای نشان دادن و کار با آن‌ها استفاده شود؛ ابزار علامت‌ها خودشان اشیاء ریاضی نیستند، اما به نوعی آن‌ها را نشان می‌دهند. علامت‌ها خودشان معنای ذاتی، مستقل از تفسیر دارند، اما این معنا با توجه به ذهنیت تفسیرکننده، هنگام تفسیر نشانه‌ها به نشانه‌های دیگر تبدیل می‌شوند (Saenz-Lulow & Zellweger, 2016). با استفاده از نظریه نشانه‌شناسی پیرس می‌توان برای نشان دادن اهمیت نشانه‌ها، چگونگی نشان دادن اشیاء توسط ابزار علامت‌ها، چگونگی در هم تنیدگی و تفسیر نشانه‌ها و نحوه ارتباط و معنی آن به وسیله نشانه‌ها استفاده کرد (Peirce, 2005).

<sup>۱</sup> Sfard's Commognitive Theory

<sup>۲</sup> SOLO

<sup>۳</sup> Sign vehicles

یک مفهوم ریاضی مانند مشتق، مستقل از بازنمایی‌های آن نیست (زندیه، ۲۰۰۰). بنابراین، ساخت مفاهیم توسط نشانه‌ها تعیین می‌شود، به طوری که نشانه‌ها نقش اولیه و اساسی را در ارائه و اصلاح مفاهیم ریاضی ایفا می‌کنند (Lassiter, 2024; Krause, 2016). با توجه به این دیدگاه نشانه‌شناسی، می‌توانیم در نظر بگیریم که مفهوم‌سازی و معناسازی به وسیله ارتباط بین سه اجزای نشانه صورت می‌گیرد. حال بر بخشی از سه‌تایی که بین ابزار علامت و شیء مرتبط است، تمرکز می‌کنیم. ماهیت این رابطه ممکن است یکی از سه نوع باشد: شمایل<sup>۱</sup>، نمایه<sup>۲</sup> و نماد<sup>۳</sup>. مانند سایر ابزار علامت‌ها، ابزار علامت‌های ریاضی (به عنوان مثال، شکل‌های ریاضی، نمودارها، مفاهیم، عبارات زبان‌شناسی ریاضی) تنها می‌توانند برخی از جنبه‌های یک شیء ریاضی را نشان دهند، اما همه خصوصیات و خواص آن در همان زمان نشان نمی‌دهند، آن‌ها برخی را به پیش‌زمینه می‌آورند و برخی را در پس‌زمینه نگه می‌دارند. در نتیجه، فرآیند مفهوم‌سازی و ساخت معنای اشیاء ریاضی را می‌توان به عنوان یک فرآیند بازگشتی در نظر گرفت که توسط انواع نشانه‌های ریاضی واسطه (میانجی‌گری) شده است (Almida & Silva, 2018; Otte, 2008; Sáenz-). این دیدگاه باعث شد که ما نشانه‌شناسی را به عنوان یک ابزار موفق برای تجزیه و تحلیل ارائه مفهوم مشتق در کتاب‌های درسی ریاضی در نظر بگیریم. نشانه‌ها در کتاب‌های درسی نقش مهمی در توسعه استدلال‌های ریاضی، عادت‌های تفکر و در نتیجه در مفهوم‌سازی اشیاء ریاضی دارند (Mesa, 2010). نشانه‌های ریاضی که در کتاب درسی استفاده می‌شود، عمدتاً به عنوان ابزارهایی برای کدگذاری و توصیف اشیاء ریاضی، برای عملیات با این اشیاء، و همچنین ارتباطات دانش ریاضی بین معلمان و دانش‌آموزان به کار می‌روند. در نتیجه، نحوه ارائه و ارتباط نشانه‌های ریاضی در کتاب‌های درسی ممکن است فرآیند مفهوم‌سازی مشتق را فعال یا محدود سازد.

در این پژوهش، کتاب‌های درسی ریاضی ایران در پایه‌های یازدهم و دوازدهم را - که طی ۴۵ سال در سیستم آموزشی ایران در چرخه تدریس قرار داشته‌اند - به روش تحلیل محتوا بررسی شده‌اند. برخی از این کتاب‌ها مانند ریاضی عمومی ۱ و ۲ (Bijan Zadeh et al., 2011) نزدیک به ربع قرن در ایران تدریس شده‌اند. بررسی این کتاب‌ها و به ویژه مقایسه آن‌ها با توجه به کتاب‌های جدید تألیف شده (e.g. Davarzani et al., 2023) دلالت‌ها و ظرفیت‌های آموزشی مناسبی را در اختیار پژوهشگران و جامعه آموزش ریاضی و به ویژه معلمان ریاضی قرار می‌دهد. تمرکز اصلی مطالعه حاضر بر چگونگی ارائه مفهوم مشتق در یک نقطه در کتاب‌های درسی است؛ سپس در انتهای هر بحث، هر کتاب با کتاب‌های درسی دیگر بر اساس نظریه پیرس مقایسه شده است. در این پژوهش به دنبال این سؤال هستیم که مفهوم «مشتق در یک نقطه» چگونه در کتاب‌های درسی ریاضی ایران در یک دوره زمانی ۴۵ ساله، به کمک چارچوب نشانه‌شناسی پیرس تفسیر می‌شود؟

<sup>۱</sup>. Icon

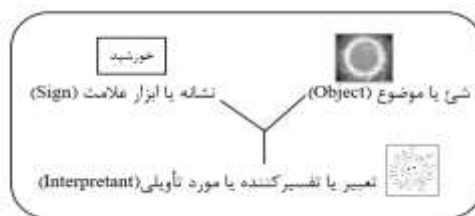
<sup>۲</sup>. Index

<sup>۳</sup>. Symbol

## ادبیات و پیشینه پژوهش

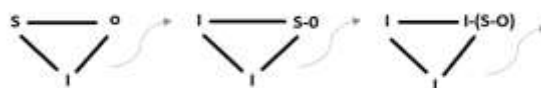
پرسمگ و همکاران (Presmeg et al., 2018) نشانه‌شناسی<sup>۱</sup> را به معنی دانش یا شاخه‌ای که نشانه‌ها و نظام‌های نشانه‌ای را بررسی می‌کند، تعریف می‌کنند. از دیدگاه پیرس، نشانه به معنی، چیزی است که برای کسی در مناسبتی خاص و به عنوانی خاص، علامت چیز دیگری باشد. مفهوم ارائه شده توسط پیرس شامل این می‌شود که معنای یک نشانه به طور خاص مشخص نمی‌شود، بلکه بستگی به عوامل مختلفی نظیر تعبیر<sup>۲</sup> (تفسیر کننده)، زمینه و پیش‌زمینه تفسیر دارد. این امر برای مشاهده فرایندهای یادگیری ریاضی بسیار مهم است که در آن اشیاء ذکر شده توسط نشانه‌ها به طور مستقیم قابل دسترسی نیستند. شکل ۱ نشانه‌شناسی سه‌گانه پیرس نشان می‌دهد.

مؤلفه‌های اصلی یک نشانه عبارتند از: نشانه یا بازنمای، شیء و تعبیر یا تفسیر کننده. نشانه یا بازنمای: آن چه که به شخص یا چیزی دلالت می‌کند. شیء: همان چیزی است که نشانه یا بازنمای، ما به ازای آن هستیم. تعبیر یا تفسیر کننده: معمولاً آن را نشانه ذهنی می‌نامیم، چیزی است که وقتی فرد با یک نشانه برخورد می‌کند، در ذهن او ایجاد می‌شود.



شکل ۱. نشانه‌شناسی سه‌گانه پیرس (Krause, 2016)

تفسیر کننده شخص نیست، بلکه فکری است که در ذهن کسی ایجاد می‌شود، همچنین تفسیر کننده نوعی نتیجه است که می‌تواند به نوبه خود یک نشانه واقع شود و بدین گونه نشانه‌های دیگری بوجود آید. شکل ۲ این سلسله فرآیند تولید نشانه را نشان می‌دهد (Peirce, 1931-1958; Kadunz, 2016).

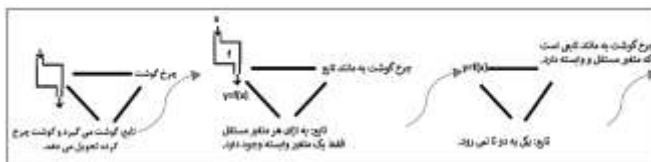


شکل ۲. سلسله فرآیند تولید نشانه (Peirce, 2005)

به عنوان نمونه برای چرخ گوشت به مثابه تابع می‌توان بدین صورت عمل کرد (شکل ۳):

<sup>۱</sup> Semiotics

<sup>۲</sup> Interpretant



شکل ۳. سلسله فرآیند تولید نشانه برای تابع

ویژگی‌های نشانه پیرس این است که: الف) کیفیت مادی و ملموس داشته باشد؛ ب) کاربرد نشان‌دهنده داشته باشد؛ ج) به کسی چیزی نشان دهد. پیرس تقسیم‌بندی مختلفی بر اساس کاربردهای نشانه‌ها دارد که ما در این جا به مهمترین تقسیم‌بندی پیرس یعنی بر اساس ارتباط نشانه با شیء یعنی شمایل، نمایه و نماد می‌پردازیم (پیرس، ۱۹۹۸-۱۹۹۲).

۱- شمایل: بین نشانه و شیء شباهت وجود دارد. مانند عکس یک شخص. مثال شمایل تابع، بردار و متوازی الاضلاع در شکل ۴ نشان داده شده است (Barbin, 2010).



شکل ۴. شمایل تابع، بردار و متوازی الاضلاع

شمایل می‌تواند دارای سه نوع تصویری (شامل هر نوع کیفیت حسی یا ترکیبی از آن‌ها که موضوع را تجسم بخشد مانند تصویر صوتی)، نموداری (به موجب روابط قیاسی با اجزای خودشان، نمایانگر اجزای شیء هستند) یا استعاره‌ای (از طریق نمایاندن نوعی تشابه در چیزی دیگر که معرف ویژگی بازنمودی یک بازنمون هستند) باشد (Xiong & Peng, 2022).

۲- نمایه: نشانه‌ای است که به شیء وابسته است. رابطه بین نشانه و شیء ضروری است و بایستی بین آن‌ها رابطه علی و طبیعی پیدا کنیم. مانند دلالت دود بر آتش. نمایه خود از چند شمایل تشکیل شده است. یکی از جنبه‌های مهم نمایه‌ها که اساس آن در سلسله‌مراتبی بودن نشانه‌شناسی پیرسی است، این می‌باشد که شمایل‌ها را سازمان‌دهی می‌کنند. به عنوان مثالی دیگر در شکل ۵، نمایه متوازی الاضلاع، بردار و تابع مشخص شده است.



شکل ۵. تابع با نمایه  $f, f(x), x$  - بردار با نمایه  $AB$  - متوازی الاضلاع با نمایه  $ABCD$

۳- نماد: نشانه‌ای است که به تفسیرکننده نیاز داشته باشد. در نماد، رابطه بین شیء و نشانه قراردادی است. مانند: رمز. نمادها بر خلاف شمایل و نمایه به تنهایی قابل توضیح نیستند. نمادها به عنوان نمایه‌ها، شمایل‌ها را در مرتبه‌ای بالاتر سازمان‌دهی می‌کنند. با این وجود دو تفاوت اساسی وجود دارد: اولاً نشانه

نمی‌تواند یک نماد در خودش باشد و باید شامل روابط قراردادی با دیگر نشانه‌ها باشد. ثانیاً سیستم نمادها را نمی‌توان آموزش داد زیرا نمایه‌ها از تجربه و حافظه بوجود آمده‌اند و سیستم نمادها در یک زمان از اتصالات بی‌شمار بین نمایه‌ها حاصل شده است (Davis & McGowen, 2001). به عنوان نمونه؛ نمادهای تابع،  $y = f(x)$  - بردار،  $\overline{AB}$  - متوازی الاضلاع،  $ABCD$  می‌تواند باشند.

## روش تحقیق

روش پژوهش، تحلیل محتوای کیفی از نوع قیاسی است. تحلیل محتوای کتاب‌های درسی می‌تواند به بهترین شکل ممکن به ایجاد کتاب اثر بخش و متمرکز کمک و یاری کند و یاددهی و یادگیری را تسهیل نماید (Haghjoo et al., 2022). تحلیل محتوای قیاسی، نوعی تحلیل محتوا است که محقق بر اساس یک چارچوب از قبل تعیین شده، محتوا را مورد بررسی قرار می‌دهد. در تحلیل محتوای قیاسی ابتدا با یک چارچوب یا نظریه شروع کرده و سپس کدهایی پیش از تحلیل و در خلال آن تعریف شده و در نهایت با استفاده از چارچوب کدها مورد تحلیل قرار خواهد گرفت (Tabrizi, 2014). واحد تحلیل تمامی مثال‌ها، فعالیت‌ها، تمرین‌ها و کاردرکلاس، متن و تصاویر می‌باشد. ما توجه خود را به یک فصل از کتاب‌های درسی ریاضی ایران که طی ۴۵ سال، در دو رشته ریاضی و تجربی (پایه‌های یازدهم و دوازدهم تحصیلی) چاپ شده‌اند، معطوف می‌داریم و بر چگونگی معرفی مفهوم مشتق در یک نقطه تمرکز می‌کنیم. ۱۴ کتاب مورد بررسی قرار گرفته که ۸ تای آن مربوط به رشته ریاضی و مابقی به رشته تجربی تعلق دارند.

با لنز سیستم سه‌گانه نشانه‌شناسی پیرس، ما به معرفی مفهوم مشتق در تمام کتاب‌ها و بویژه کتاب حسابان ۲ (۱۴۰۲) نگاه می‌کنیم. دلیل استفاده از این کتاب، این است که اکنون در سیستم آموزشی در حال استفاده است. این کتاب شامل مطالعه توابع، مثلثات، حدهای نامتناهی - حد در بی‌نهایت، مشتق و کاربردهای مشتق و شامل پنج فصل و ۱۵۲ صفحه است که ۴۰ صفحه آن به فصل چهارم اختصاص داده شده است. در بخش مقدمه، مؤلفان خود می‌نویسند که تأکید کتاب درک مفاهیم است، بنابراین توجه ما به نحوه معرفی مفهوم مشتق معطوف شده است. این محتوا بخشی از فصل چهارم کتاب است و مشتق نامیده می‌شود. در بخش اول کتاب، ایده‌ها و ملاحظات درباره مماس‌ها را ارائه می‌دهد. در کتاب حسابان ۱ (۱۳۹۸) مفهوم شهودی، تعریف و برخی ویژگی‌ها و تکنیک‌های محاسبه حدها و همچنین ویژگی‌های توابع پیوسته ارائه شده است. ما درس ۱ و ۲ و ۳ از کتاب حسابان ۲ (۱۴۰۲) را تجزیه و تحلیل می‌کنیم که به مفهوم مشتق در یک نقطه اشاره دارند. یک مطالعه اکتشافی و تفسیری با هدف تجزیه و تحلیل مؤلفه‌های مرتبط از یک دیدگاه نشانه‌شناسی را برای ارائه مفهوم مشتق انجام می‌دهیم. هدف این تحلیل بررسی چگونگی ارائه و اتصال نشانه‌های ریاضی ارائه شده در کتاب درسی حسابان ۲ (۱۴۰۲) است. بر مبنای مفروضات نشانه‌شناسی پیرس، این نشانه‌ها را می‌توان به عنوان شمایل، نمابه و نماد توصیف کرد.

ما برخی از نکات را در مورد امکان فعال یا محدود کردن دانش‌آموزان برای مفهوم‌سازی مشتق استفاده می‌کنیم. همچنین در نظر می‌گیریم که چگونه این نشانه‌ها را می‌توان در هنگام استفاده از کتاب درسی، تفسیر و درک کرد. ملاحظات ما در مورد کتاب درسی به سه بخش تقسیم می‌شود که در ادامه به آن‌ها اشاره می‌کنیم. جدول‌های ۱ و ۲ کدگذاری کتاب‌های درسی و سال‌هایی که در سیستم آموزشی فعال بوده‌اند را نشان می‌دهد.

برای بررسی روایی ابزار اندازه‌گیری از سه متخصص آموزش ریاضی<sup>۱</sup> کمک گرفته شده است و برای بررسی پایایی یافته‌ها از توافق بین ارزیاب‌ها استفاده شده است. نویسنده دوم که ۱۴ کتاب درسی را تجزیه و تحلیل کرد، ۱۵ صفحه (از ۱۵۳ صفحه مربوط به مشتق در این ۱۴ کتاب درسی) را به طور تصادفی انتخاب کرد به این صورت که یک صفحه از هر کتاب درسی را انتخاب نموده و برای نویسنده اول ارسال کرده است تا به صورت دقیق تحلیل شوند. توافقات بین ارزیاب برای سه بخش اصلی تجزیه و تحلیل (یعنی شمایل، نمایه و نماد) همگی ۱۰۰٪ شده است. در کدگذاری نشانه‌ها در این مطالعه شمایل را به دو دسته تصویری یا نموداری و استعاره‌ای تقسیم شده است. همچنین نویسندگان با توجه به محتوای کتاب‌های درسی نمایه را به سه دسته عددی، ضابطه‌ای و نموداری تقسیم‌بندی کرده‌اند. منظور از نمایه عددی همان بازنمایی عددی مشتق به کمک جدول اعداد است یا محاسبه تقریبی مشتق در یک نقطه است؛ نمایه ضابطه‌ای، همان ضابطه تابع مشتق در یک نقطه است؛ و منظور از نمایه نموداری یعنی تعریف مشتق با توجه به نمودار مانند حد شیب‌های خطوط قاطع می‌باشد. در تحلیل محتوای متن کتاب‌ها، برخی کتاب‌ها به دلیل این که متن مشابهی داشتند؛ فقط یکی آورده شده است. به عنوان نمونه کتاب‌های حسابان ۲ (۱۴۰۲) و ریاضی ۳ (۱۴۰۲) یا کتاب‌های حسابان (۱۳۸۸) و حسابان (۱۳۹۵) یا ریاضی سوم تجربی (۱۳۸۸) و ریاضی ۳ سوم تجربی (۱۳۹۵). بنابراین در تحلیل به یک صورت هستند.

#### جدول ۱. کدگذاری کتاب‌های درسی رشته ریاضی در طی ۴۵ سال

کتاب‌های رشته ریاضی				
نام کتاب	پایه تحصیلی	سال‌هایی که در سیستم آموزشی فعال بوده است.	تعداد سال‌های فعال در سیستم آموزشی	کد
جبر	پایه یازدهم	(۱۳۵۸-۱۳۷۲)	۱۵	M11-1
جبر و آنالیز	پایه دوازدهم	(۱۳۵۸-۱۳۷۲)	۱۵	M12-1
حسابان ۱	پایه یازدهم	(۱۳۷۳-۱۳۸۳)	۱۱	M11-2
حساب دیفرانسیل و انتگرال ۲و۱	پایه دوازدهم	(۱۳۷۳-۱۳۹۰)	۱۸	M12-2
حسابان	پایه یازدهم	(۱۳۸۴-۱۳۸۸)	۵	M11-3

<sup>۱</sup> برای متخصصین آموزش ریاضی (این افراد دبیر ریاضی نیز هستند) ابتدا چارچوب پیرس و ابزار اندازه‌گیری معرفی شده و سپس در اختیار آن‌ها قرار داده شده است تا بررسی کنند که آیا مفهوم مشتق در یک نقطه را ارزیابی می‌کند یا خیر.

M12-3	۶	(۱۳۹۱-۱۳۹۶)	پایه دوازدهم	حساب دیفرانسیل و انتگرال
M11-4	۷	(۱۳۸۹-۱۳۹۵)	پایه یازدهم	حسابان
M12-4	۴	(۱۳۹۷-۱۴۰۲)	پایه دوازدهم	حسابان ۲

### جدول ۲: کدگذاری کتاب‌های درسی رشته تجربی در طی ۴۵ سال

کتاب‌های رشته تجربی				
کد	تعداد سال‌های فعال در سیستم آموزشی	سال‌هایی که در سیستم آموزشی فعال بوده است.	پایه تحصیلی	نام کتاب و سال‌هایی که منتشر شده است (سال سوم و چهارم به ترتیب و متوالی)
E11-1	۱۵	(۱۳۵۸-۱۳۷۲)	پایه یازدهم	جبر و مثلثات
E12-1	۱۵	(۱۳۵۸-۱۳۷۲)	پایه دوازدهم	ریاضیات
E11-2	۱۶	(۱۳۷۳-۱۳۸۸)	پایه یازدهم	ریاضی سوم تجربی
E12-2	۲۴	(۱۳۷۳-۱۳۹۶)	پایه دوازدهم	ریاضی عمومی ۱ و ۲
E11-3	۷	(۱۳۸۹-۱۳۹۵)	پایه یازدهم	ریاضی ۳
E12-3	۴	(۱۳۹۷-۱۴۰۲)	پایه دوازدهم	ریاضی ۳

### یافته‌ها

در ابتدا چگونگی شروع ارائه مفهوم مشتق در کتاب‌های درسی را به لحاظ زبان شناسی بررسی می‌کنیم، سپس وارد چارچوب نشانه‌شناسی پیرس شامل تحلیل شمایل، نمایه و نماد می‌شویم.

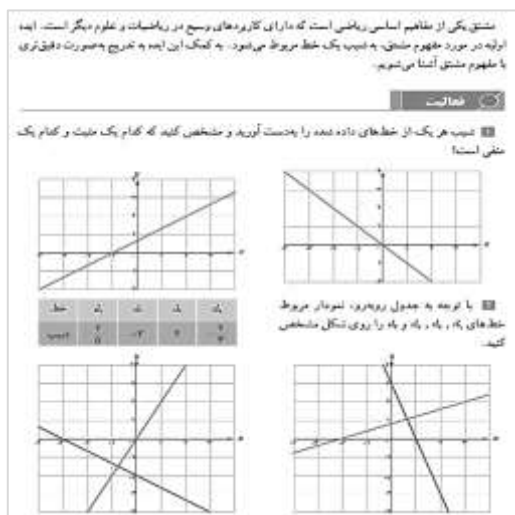
#### ۱.۴. جنبه موضوعی مفهوم مشتق: مشتق در یک نقطه خاص

در طول فصل چهارم کتاب M12-4، مؤلفان مفهوم مشتق یک تابع در یک نقطه خاص را در دامنه آن ساخته‌اند. همانطور که در شکل ۶ نشان داده شده است، فصل با یک عبارت زبان شناختی ریاضی و فعالیت یادآوری شیب شروع می‌شود. اگر ما استدلال‌های بندر و اسکریبر<sup>۱</sup> (Bender & Schreiber, 1985) را در نظر بگیریم، می‌توانیم بگوییم که مفهوم مشتق در کتاب به روش عملیاتی ارائه می‌شود، به عنوان مثال، با شروع از هدف (برای تعریف مشتق در یک نقطه خاص)، استانداردهای ارائه برای تحقق این منظور نیز توسعه می‌یابد. هر ابزار علامت ریاضی مورد استفاده در توسعه مفهوم مشتق، می‌تواند تنها برخی از جنبه‌های این شیء ریاضی، و نه همه ویژگی‌ها و خواص آن را هم زمان نشان دهد. با این حال، هر یک از ابزار علامت خاص باید یک رابطه بازگشتی با شیء بیان کند و باید امکاناتی را شناسایی کند که نشانه‌ها به عنوان وسیله دانستن شیء مورد استفاده قرار می‌گیرند.

ابزار علامت (بیان زبان شناختی ریاضی) نشان داده شده در شکل ۶، اشاره به شیء «شیب» به عنوان یک ویژگی دارد. با این حال، دانش‌آموزان در حال حاضر، مفهوم شیب را می‌دانند، زیرا در کتاب حسابان ۱

<sup>1</sup> Bender & Schreiber

(۱۳۹۸) و ریاضی نهم (۱۳۹۸) ارائه شده است. علاوه بر این، مؤلفان در ارائه خود در شکل ۶ به مفهوم شیب اشاره می‌کنند و این کار را در سراسر متن انجام شده است.



شکل ۶. شروع مفهوم مشتق با یک عبارت زبان شناختی و فعالیت یادآوری شیب (M12-4، ۱۴۰۲).

(ص ۷۳)

بنابراین، دانش‌آموزان می‌توانند از دانش قبلی خود برای رسیدن به هدف (مفهوم شیب) استفاده کنند. یک نشانه می‌تواند چیزی را برای کسی نشان دهد، اگر این فرد قبلاً بداند چگونه این نشانه را تفسیر کند. این دانش قبلی است که آشنایی با نشانه را ایجاد می‌کند (Hoffmann & Roth, 2007). جدول ۳، شروع مفهوم مشتق در کتاب‌های درسی ریاضی کشور ایران در رشته ریاضی را نشان می‌دهد. نمونه‌هایی از شروع این کتاب‌ها در شکل ۷ آورده شده است.

جدول ۳. شروع مفهوم مشتق در کتاب‌های درسی رشته ریاضی ۴۵ سال اخیر کشور ایران

کتاب‌های رشته ریاضی	
نام کتاب	شروع مبحث مشتق
M11-1	با یک عبارت زبان شناختی و یافتن نمو متغیر و نمو تابع
M12-1	تعریف رسمی مشتق در یک نقطه بدون عبارات زبان شناختی
M11-2	با یک عبارت زبان شناختی و مثالی از پیدا کردن شیب در یک نقطه
M12-2	با یک عبارت زبان شناختی و مثال سرعت متوسط و لحظه‌ای
M11-3	با یک عبارت زبان شناختی و مثالی از پیدا کردن شیب در یک نقطه
M12-3	با یک عبارت زبان شناختی و مسئله یافتن خط مماس

M11-4	با یک عبارت زبان شناختی و فعالیتی در مورد خط مماس
M12-4	با یک عبارت زبان شناختی و یادآوری شیب

در جدول ۴، شروع مفهوم مشتق در کتاب‌های رشته تجربی سال‌های سوم و چهارم از سال ۱۳۵۸ شمسی تا سال ۱۴۰۲ آورده شده است.

جدول ۴. شروع مفهوم مشتق در کتاب‌های درسی رشته تجربی ۴۵ سال اخیر کشور ایران

کتاب‌های رشته تجربی	
نام کتاب	شروع مبحث مشتق
E11-1	تعریف رسمی مشتق به کمک فرآیند ساخت نمودار
E12-1	تعریف رسمی مشتق به کمک فرآیند ساخت نمودار
E11-2	با یک عبارت زبان شناختی و مثالی از آهنگ تغییر
E12-2	یادآوری مشتق به کمک نمودار و مثالی با تعریف رسمی
E11-3	با یک عبارت زبان شناختی و مثالی از آهنگ تغییر
E12-3	با یک عبارت زبان شناختی و یادآوری شیب

همانطور که در جدول‌های ۳ و ۴ نشان داده شده است می‌توان مشاهده کرد که برخی کتاب‌ها شروع مفهوم مشتق را با تعریف رسمی آن آغاز کرده‌اند.



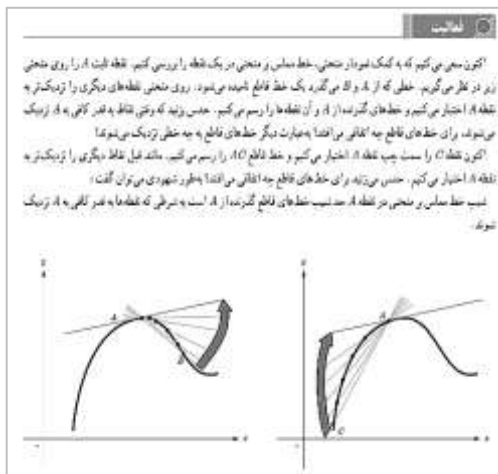
شکل ۷. تصویری از شروع مشتق در کتاب M12-1 (بدون عبارت زبان‌شناختی)

۲،۴. شمایل: شمایل نموداری یا تصویری و شمایل استعاره‌ای (مشتق در یک نقطه خاص)

نشانه‌شناسی پیرس شامل سه بخش است که اولین آن شمایلی می‌باشد. شکل ۸، مفهوم حدی خط مماس را به صورت شهودی نشان می‌دهد.

می‌توان فرض کرد که وقتی مطالعه مشتق شروع می‌شود، دانش‌آموزان از گذشته، دانش قبلی درباره شیب و حدها دارند. با این حال، منظور پیرس از دانش قبلی، آشنایی با سیستم نشانه‌ها نیست، بلکه شامل پیش شرط برای به دست آوردن ایده‌هایی است که توسط نشانه‌ها مشخص می‌شوند. به این ترتیب، مشتق، نوع خاصی از ابزار علامت حد، نامیده می‌شود (شکل ۸) و شباهتی به شیء نشانه (مفهوم مشتق) دارد و شامل ویژگی‌هایی است که مربوط به این مؤلفه است. به این معنا، آن را می‌توان به عنوان یک شمایل در

نظر گرفت (Pierce, 2005). پس از ارائه ابزارعلامت مشتق یک تابع در یک نقطه، که حد است، این کتاب مفاهیم دیگری را ارائه می‌دهد که مربوط به فعالیت است که می‌تواند شمایل را توسعه دهد.

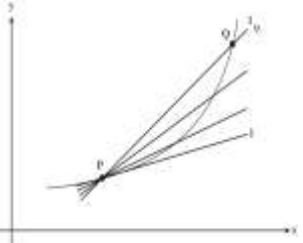
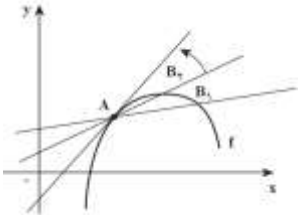
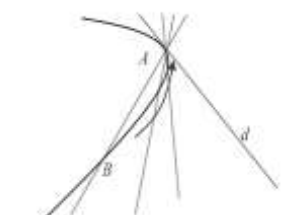


شکل ۸. مفهوم حدی خط مماس از روی نمودار (M12-4، ۱۴۰۲، ص ۷۴)

جدول ۵ و جدول ۶، وجود یا عدم وجود شمایل حدی مشتق در یک نقطه را در کتاب‌های درسی ریاضی ۴۵ سال اخیر کشور ایران در رشته ریاضی و تجربی نشان می‌دهد.

جدول ۵. شمایل حدی مشتق در یک نقطه خاص در کتاب‌های درسی رشته ریاضی ۴۵ سال اخیر کشور ایران

کتاب‌های رشته ریاضی		نام کتاب
شمایل مشتق		
شمایل استعاره‌ای	شمایل نموداری یا تصویری	
$x$	$x$	M11-1
اگر $M_0(x_0, f(x_0))$ يك نقطه منحنی نمایش تابع $f$ باشد می‌دانیم که نسبت $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ نمایش ضریب زاویه وتر $M_0M$ است که $M(x, f(x))$ نقطه‌ای نزدیک به $M_0$ است اگر $x \rightarrow x_0$ یا $f(x) \rightarrow f(x_0)$ زیرا $f$ در نقطه $M_0$ پیوسته است. حد نقطه $M_0$ نقطه $M_0$ است در این صورت حد وتر $M_0M$ مماس $M_0T$ است.	$x$	M12-1
$x$	$x$	M11-2

<p>خط <math>l</math> که حالت حدی خطوط فایع گذرنده از <math>P</math> و <math>Q</math> است، هنگامی که <math>Q</math> به <math>P</math> میل می کند را، خط مماس بر نمودار <math>f</math> در نقطه <math>P</math> می نامند. (توجه کنید که نقطه <math>Q</math> می تواند در هر یک از دو طرف نقطه <math>P</math> روی نمودار <math>f</math> اختیار شود)</p>		M12-2
x	x	M11-3
x		M12-3
x		M11-4
✓ (شکل ۸)	✓ (شکل ۸)	M12-4

باتوجه به جدول ۵، تنها کتاب M12-4 دارای هر دو شمایل نموداری یا تصویری و استعاره‌ای است و کتاب‌های دیگر یا شمایل نموداری یا تصویری و یا استعاره‌ای به تنهایی دارند. همچنین در کتاب‌های سال سوم متوسطه قبل از سال ۱۳۸۹، شمایل حدی مشتق در یک نقطه خاص وجود نداشت.

جدول ۶. شمایل حدی مشتق در یک نقطه در کتاب‌های درسی رشته تجربی ۴۵ سال اخیر کشور ایران

کتاب‌های رشته تجربی		نام کتاب
شمایل مشتق		
شمایل استعاره‌ای	شمایل نموداری یا تصویری	
x	x	E11-1
x	x	E12-1
اعداد سطر آخر جدول آهنگ توسط عبارات تابع را در نقطه $x_1 = 3$ نشان می دهند. به طوری که دیده می شود این آهنگ علاوه بر تابع $f$ به نقطه $x_1 = 3$ و مقدار $x - x_1$ نیز بستگی دارد. وقتی که $x$ با مقادیر کوچک تر از ۳ یا بزرگ تر از ۳ به ۳ نزدیک می شود این نسبت به ۲ نزدیک می گردد.	x	E11-2
x	x	E12-2
✓	x	E11-3
✓ (شکل ۸)	✓ (شکل ۸)	E12-3

جدول ۶ نشان می‌دهد که در کتاب E12-3 از دو شمایل استعاره‌ای و نموداری یا تصویری و در کتاب E11-2 و E11-3 از شمایل استعاره‌ای استفاده شده و در هیچ یک از کتاب‌های درسی رشته تجربی برای مشتق در یک نقطه خاص از شمایل نموداری یا تصویری استفاده نشده است. شیب‌های خط قاطع و خط مماس تابع  $f$  در نقطه  $(a, f(a))$  در کتاب M12-4 مطابق شکل ۹ تعریف می‌شوند.

### ۳.۴. نمایه عددی، نمایه نموداری و نمایه ضابطه‌ای (مشتق در یک نقطه خاص)

دومین بخش از چارچوب نشانه‌شناسی پیرس نمایه است.

با توجه به شیوه عملیاتی که در آن مفهوم مشتق یک تابع در یک نقطه در کتاب ارائه می‌شود، مؤلفان باید مفهوم مشتق را به منظور ایجاد فهم برای خوانندگان ارائه کنند. بیان ریاضی

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{و} \quad m = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

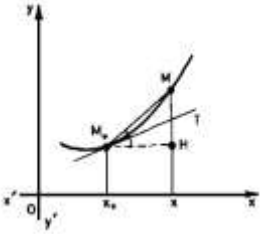
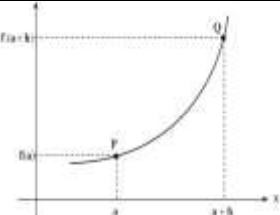
وقتی  $x$  به  $a$  نزدیک می‌شوند، اشاره دارند. با این حال، خوانندگان (دانش‌آموزان) ممکن است (در این لحظه) نتیجه بگیرند که بین این ابزار علامت‌ها و مفهوم مشتق ارتباط وجود دارد. بنابراین، طبق نظریه پیرس، این ابزار علامت‌ها ارتباطی با حواس و حافظه دانش‌آموزان ایجاد می‌کنند. به این ترتیب، برای دانش‌آموزانی که در حال خواندن کتاب هستند، به نظر می‌رسد که اینها ابزار علامت‌های نمایه‌ای در ارتباط با مفهوم «شیء مشتق» هستند. با این وجود، این نشانه‌ها، جایگاه متفاوتی برای دانش‌آموزان در زمان آشنایی با مفهوم مشتق دارند. تمایز میان سه نوع ابزار علامت‌ها (شمایل، نمایه و نماد) در نشانه‌های ریاضی زمانی پیچیده می‌شود که ممکن است نشانه‌های مشابه را به شیوه‌های مختلف دسته‌بندی کنند؛ با در نظر گرفتن آنچه که آنها در مورد این موضوع در زمان نگاه کردن به نشانه می‌دانند ( Presmeg, 2008).

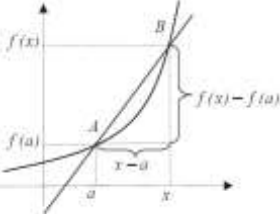
نقطه علامت	شیب خط مماس در نقطه $(a, f(a))$ می‌گردد.	شیب خط مماس در نقطه $(a, f(a))$
[۳.۶.۲]	$\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{1 - 0}{1 - 0} = 1$	$\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{1 - 0}{1 - 0} = 1$
[۳.۶.۳]	.....	.....
[۳.۶.۴]	$\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{4 - 0}{2 - 0} = 2$	$\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{4 - 0}{2 - 0} = 2$
[۳.۶.۵]	$\frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{9 - 0}{3 - 0} = 3$	$\frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{9 - 0}{3 - 0} = 3$
[۳.۶.۶]	$\frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{16 - 0}{4 - 0} = 4$	$\frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{16 - 0}{4 - 0} = 4$
[۳.۶.۷]	$\frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = \frac{25 - 0}{5 - 0} = 5$	$\frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = \frac{25 - 0}{5 - 0} = 5$
[۳.۶.۸]	$\frac{f(6) - f(0)}{6 - 0} = \frac{36 - 0}{6 - 0} = 6$	$\frac{f(6) - f(0)}{6 - 0} = \frac{36 - 0}{6 - 0} = 6$
[۳.۶.۹]	$\frac{f(7) - f(0)}{7 - 0} = \frac{49 - 0}{7 - 0} = 7$	$\frac{f(7) - f(0)}{7 - 0} = \frac{49 - 0}{7 - 0} = 7$
[۳.۶.۱۰]	$\frac{f(8) - f(0)}{8 - 0} = \frac{64 - 0}{8 - 0} = 8$	$\frac{f(8) - f(0)}{8 - 0} = \frac{64 - 0}{8 - 0} = 8$
[۳.۶.۱۱]	$\frac{f(9) - f(0)}{9 - 0} = \frac{81 - 0}{9 - 0} = 9$	$\frac{f(9) - f(0)}{9 - 0} = \frac{81 - 0}{9 - 0} = 9$
[۳.۶.۱۲]	$\frac{f(10) - f(0)}{10 - 0} = \frac{100 - 0}{10 - 0} = 10$	$\frac{f(10) - f(0)}{10 - 0} = \frac{100 - 0}{10 - 0} = 10$
[۳.۶.۱۳]	$\frac{f(11) - f(0)}{11 - 0} = \frac{121 - 0}{11 - 0} = 11$	$\frac{f(11) - f(0)}{11 - 0} = \frac{121 - 0}{11 - 0} = 11$
[۳.۶.۱۴]	$\frac{f(12) - f(0)}{12 - 0} = \frac{144 - 0}{12 - 0} = 12$	$\frac{f(12) - f(0)}{12 - 0} = \frac{144 - 0}{12 - 0} = 12$
[۳.۶.۱۵]	$\frac{f(13) - f(0)}{13 - 0} = \frac{169 - 0}{13 - 0} = 13$	$\frac{f(13) - f(0)}{13 - 0} = \frac{169 - 0}{13 - 0} = 13$
[۳.۶.۱۶]	$\frac{f(14) - f(0)}{14 - 0} = \frac{196 - 0}{14 - 0} = 14$	$\frac{f(14) - f(0)}{14 - 0} = \frac{196 - 0}{14 - 0} = 14$
[۳.۶.۱۷]	$\frac{f(15) - f(0)}{15 - 0} = \frac{225 - 0}{15 - 0} = 15$	$\frac{f(15) - f(0)}{15 - 0} = \frac{225 - 0}{15 - 0} = 15$
[۳.۶.۱۸]	$\frac{f(16) - f(0)}{16 - 0} = \frac{256 - 0}{16 - 0} = 16$	$\frac{f(16) - f(0)}{16 - 0} = \frac{256 - 0}{16 - 0} = 16$
[۳.۶.۱۹]	$\frac{f(17) - f(0)}{17 - 0} = \frac{289 - 0}{17 - 0} = 17$	$\frac{f(17) - f(0)}{17 - 0} = \frac{289 - 0}{17 - 0} = 17$
[۳.۶.۲۰]	$\frac{f(18) - f(0)}{18 - 0} = \frac{324 - 0}{18 - 0} = 18$	$\frac{f(18) - f(0)}{18 - 0} = \frac{324 - 0}{18 - 0} = 18$
[۳.۶.۲۱]	$\frac{f(19) - f(0)}{19 - 0} = \frac{361 - 0}{19 - 0} = 19$	$\frac{f(19) - f(0)}{19 - 0} = \frac{361 - 0}{19 - 0} = 19$
[۳.۶.۲۲]	$\frac{f(20) - f(0)}{20 - 0} = \frac{400 - 0}{20 - 0} = 20$	$\frac{f(20) - f(0)}{20 - 0} = \frac{400 - 0}{20 - 0} = 20$
[۳.۶.۲۳]	$\frac{f(21) - f(0)}{21 - 0} = \frac{441 - 0}{21 - 0} = 21$	$\frac{f(21) - f(0)}{21 - 0} = \frac{441 - 0}{21 - 0} = 21$
[۳.۶.۲۴]	$\frac{f(22) - f(0)}{22 - 0} = \frac{484 - 0}{22 - 0} = 22$	$\frac{f(22) - f(0)}{22 - 0} = \frac{484 - 0}{22 - 0} = 22$
[۳.۶.۲۵]	$\frac{f(23) - f(0)}{23 - 0} = \frac{529 - 0}{23 - 0} = 23$	$\frac{f(23) - f(0)}{23 - 0} = \frac{529 - 0}{23 - 0} = 23$
[۳.۶.۲۶]	$\frac{f(24) - f(0)}{24 - 0} = \frac{576 - 0}{24 - 0} = 24$	$\frac{f(24) - f(0)}{24 - 0} = \frac{576 - 0}{24 - 0} = 24$
[۳.۶.۲۷]	$\frac{f(25) - f(0)}{25 - 0} = \frac{625 - 0}{25 - 0} = 25$	$\frac{f(25) - f(0)}{25 - 0} = \frac{625 - 0}{25 - 0} = 25$
[۳.۶.۲۸]	$\frac{f(26) - f(0)}{26 - 0} = \frac{676 - 0}{26 - 0} = 26$	$\frac{f(26) - f(0)}{26 - 0} = \frac{676 - 0}{26 - 0} = 26$
[۳.۶.۲۹]	$\frac{f(27) - f(0)}{27 - 0} = \frac{729 - 0}{27 - 0} = 27$	$\frac{f(27) - f(0)}{27 - 0} = \frac{729 - 0}{27 - 0} = 27$
[۳.۶.۳۰]	$\frac{f(28) - f(0)}{28 - 0} = \frac{784 - 0}{28 - 0} = 28$	$\frac{f(28) - f(0)}{28 - 0} = \frac{784 - 0}{28 - 0} = 28$
[۳.۶.۳۱]	$\frac{f(29) - f(0)}{29 - 0} = \frac{841 - 0}{29 - 0} = 29$	$\frac{f(29) - f(0)}{29 - 0} = \frac{841 - 0}{29 - 0} = 29$
[۳.۶.۳۲]	$\frac{f(30) - f(0)}{30 - 0} = \frac{900 - 0}{30 - 0} = 30$	$\frac{f(30) - f(0)}{30 - 0} = \frac{900 - 0}{30 - 0} = 30$
[۳.۶.۳۳]	$\frac{f(31) - f(0)}{31 - 0} = \frac{961 - 0}{31 - 0} = 31$	$\frac{f(31) - f(0)}{31 - 0} = \frac{961 - 0}{31 - 0} = 31$
[۳.۶.۳۴]	$\frac{f(32) - f(0)}{32 - 0} = \frac{1024 - 0}{32 - 0} = 32$	$\frac{f(32) - f(0)}{32 - 0} = \frac{1024 - 0}{32 - 0} = 32$
[۳.۶.۳۵]	$\frac{f(33) - f(0)}{33 - 0} = \frac{1089 - 0}{33 - 0} = 33$	$\frac{f(33) - f(0)}{33 - 0} = \frac{1089 - 0}{33 - 0} = 33$
[۳.۶.۳۶]	$\frac{f(34) - f(0)}{34 - 0} = \frac{1156 - 0}{34 - 0} = 34$	$\frac{f(34) - f(0)}{34 - 0} = \frac{1156 - 0}{34 - 0} = 34$
[۳.۶.۳۷]	$\frac{f(35) - f(0)}{35 - 0} = \frac{1225 - 0}{35 - 0} = 35$	$\frac{f(35) - f(0)}{35 - 0} = \frac{1225 - 0}{35 - 0} = 35$
[۳.۶.۳۸]	$\frac{f(36) - f(0)}{36 - 0} = \frac{1296 - 0}{36 - 0} = 36$	$\frac{f(36) - f(0)}{36 - 0} = \frac{1296 - 0}{36 - 0} = 36$
[۳.۶.۳۹]	$\frac{f(37) - f(0)}{37 - 0} = \frac{1369 - 0}{37 - 0} = 37$	$\frac{f(37) - f(0)}{37 - 0} = \frac{1369 - 0}{37 - 0} = 37$
[۳.۶.۴۰]	$\frac{f(38) - f(0)}{38 - 0} = \frac{1444 - 0}{38 - 0} = 38$	$\frac{f(38) - f(0)}{38 - 0} = \frac{1444 - 0}{38 - 0} = 38$
[۳.۶.۴۱]	$\frac{f(39) - f(0)}{39 - 0} = \frac{1521 - 0}{39 - 0} = 39$	$\frac{f(39) - f(0)}{39 - 0} = \frac{1521 - 0}{39 - 0} = 39$
[۳.۶.۴۲]	$\frac{f(40) - f(0)}{40 - 0} = \frac{1600 - 0}{40 - 0} = 40$	$\frac{f(40) - f(0)}{40 - 0} = \frac{1600 - 0}{40 - 0} = 40$
[۳.۶.۴۳]	$\frac{f(41) - f(0)}{41 - 0} = \frac{1681 - 0}{41 - 0} = 41$	$\frac{f(41) - f(0)}{41 - 0} = \frac{1681 - 0}{41 - 0} = 41$
[۳.۶.۴۴]	$\frac{f(42) - f(0)}{42 - 0} = \frac{1764 - 0}{42 - 0} = 42$	$\frac{f(42) - f(0)}{42 - 0} = \frac{1764 - 0}{42 - 0} = 42$
[۳.۶.۴۵]	$\frac{f(43) - f(0)}{43 - 0} = \frac{1849 - 0}{43 - 0} = 43$	$\frac{f(43) - f(0)}{43 - 0} = \frac{1849 - 0}{43 - 0} = 43$
[۳.۶.۴۶]	$\frac{f(44) - f(0)}{44 - 0} = \frac{1936 - 0}{44 - 0} = 44$	$\frac{f(44) - f(0)}{44 - 0} = \frac{1936 - 0}{44 - 0} = 44$
[۳.۶.۴۷]	$\frac{f(45) - f(0)}{45 - 0} = \frac{2025 - 0}{45 - 0} = 45$	$\frac{f(45) - f(0)}{45 - 0} = \frac{2025 - 0}{45 - 0} = 45$
[۳.۶.۴۸]	$\frac{f(46) - f(0)}{46 - 0} = \frac{2116 - 0}{46 - 0} = 46$	$\frac{f(46) - f(0)}{46 - 0} = \frac{2116 - 0}{46 - 0} = 46$
[۳.۶.۴۹]	$\frac{f(47) - f(0)}{47 - 0} = \frac{2209 - 0}{47 - 0} = 47$	$\frac{f(47) - f(0)}{47 - 0} = \frac{2209 - 0}{47 - 0} = 47$
[۳.۶.۵۰]	$\frac{f(48) - f(0)}{48 - 0} = \frac{2304 - 0}{48 - 0} = 48$	$\frac{f(48) - f(0)}{48 - 0} = \frac{2304 - 0}{48 - 0} = 48$
[۳.۶.۵۱]	$\frac{f(49) - f(0)}{49 - 0} = \frac{2401 - 0}{49 - 0} = 49$	$\frac{f(49) - f(0)}{49 - 0} = \frac{2401 - 0}{49 - 0} = 49$
[۳.۶.۵۲]	$\frac{f(50) - f(0)}{50 - 0} = \frac{2500 - 0}{50 - 0} = 50$	$\frac{f(50) - f(0)}{50 - 0} = \frac{2500 - 0}{50 - 0} = 50$
[۳.۶.۵۳]	$\frac{f(51) - f(0)}{51 - 0} = \frac{2601 - 0}{51 - 0} = 51$	$\frac{f(51) - f(0)}{51 - 0} = \frac{2601 - 0}{51 - 0} = 51$
[۳.۶.۵۴]	$\frac{f(52) - f(0)}{52 - 0} = \frac{2704 - 0}{52 - 0} = 52$	$\frac{f(52) - f(0)}{52 - 0} = \frac{2704 - 0}{52 - 0} = 52$
[۳.۶.۵۵]	$\frac{f(53) - f(0)}{53 - 0} = \frac{2809 - 0}{53 - 0} = 53$	$\frac{f(53) - f(0)}{53 - 0} = \frac{2809 - 0}{53 - 0} = 53$
[۳.۶.۵۶]	$\frac{f(54) - f(0)}{54 - 0} = \frac{2916 - 0}{54 - 0} = 54$	$\frac{f(54) - f(0)}{54 - 0} = \frac{2916 - 0}{54 - 0} = 54$
[۳.۶.۵۷]	$\frac{f(55) - f(0)}{55 - 0} = \frac{3025 - 0}{55 - 0} = 55$	$\frac{f(55) - f(0)}{55 - 0} = \frac{3025 - 0}{55 - 0} = 55$
[۳.۶.۵۸]	$\frac{f(56) - f(0)}{56 - 0} = \frac{3136 - 0}{56 - 0} = 56$	$\frac{f(56) - f(0)}{56 - 0} = \frac{3136 - 0}{56 - 0} = 56$
[۳.۶.۵۹]	$\frac{f(57) - f(0)}{57 - 0} = \frac{3249 - 0}{57 - 0} = 57$	$\frac{f(57) - f(0)}{57 - 0} = \frac{3249 - 0}{57 - 0} = 57$
[۳.۶.۶۰]	$\frac{f(58) - f(0)}{58 - 0} = \frac{3364 - 0}{58 - 0} = 58$	$\frac{f(58) - f(0)}{58 - 0} = \frac{3364 - 0}{58 - 0} = 58$
[۳.۶.۶۱]	$\frac{f(59) - f(0)}{59 - 0} = \frac{3481 - 0}{59 - 0} = 59$	$\frac{f(59) - f(0)}{59 - 0} = \frac{3481 - 0}{59 - 0} = 59$
[۳.۶.۶۲]	$\frac{f(60) - f(0)}{60 - 0} = \frac{3600 - 0}{60 - 0} = 60$	$\frac{f(60) - f(0)}{60 - 0} = \frac{3600 - 0}{60 - 0} = 60$
[۳.۶.۶۳]	$\frac{f(61) - f(0)}{61 - 0} = \frac{3721 - 0}{61 - 0} = 61$	$\frac{f(61) - f(0)}{61 - 0} = \frac{3721 - 0}{61 - 0} = 61$
[۳.۶.۶۴]	$\frac{f(62) - f(0)}{62 - 0} = \frac{3844 - 0}{62 - 0} = 62$	$\frac{f(62) - f(0)}{62 - 0} = \frac{3844 - 0}{62 - 0} = 62$
[۳.۶.۶۵]	$\frac{f(63) - f(0)}{63 - 0} = \frac{3969 - 0}{63 - 0} = 63$	$\frac{f(63) - f(0)}{63 - 0} = \frac{3969 - 0}{63 - 0} = 63$
[۳.۶.۶۶]	$\frac{f(64) - f(0)}{64 - 0} = \frac{4096 - 0}{64 - 0} = 64$	$\frac{f(64) - f(0)}{64 - 0} = \frac{4096 - 0}{64 - 0} = 64$
[۳.۶.۶۷]	$\frac{f(65) - f(0)}{65 - 0} = \frac{4225 - 0}{65 - 0} = 65$	$\frac{f(65) - f(0)}{65 - 0} = \frac{4225 - 0}{65 - 0} = 65$
[۳.۶.۶۸]	$\frac{f(66) - f(0)}{66 - 0} = \frac{4356 - 0}{66 - 0} = 66$	$\frac{f(66) - f(0)}{66 - 0} = \frac{4356 - 0}{66 - 0} = 66$
[۳.۶.۶۹]	$\frac{f(67) - f(0)}{67 - 0} = \frac{4489 - 0}{67 - 0} = 67$	$\frac{f(67) - f(0)}{67 - 0} = \frac{4489 - 0}{67 - 0} = 67$
[۳.۶.۷۰]	$\frac{f(68) - f(0)}{68 - 0} = \frac{4624 - 0}{68 - 0} = 68$	$\frac{f(68) - f(0)}{68 - 0} = \frac{4624 - 0}{68 - 0} = 68$
[۳.۶.۷۱]	$\frac{f(69) - f(0)}{69 - 0} = \frac{4761 - 0}{69 - 0} = 69$	$\frac{f(69) - f(0)}{69 - 0} = \frac{4761 - 0}{69 - 0} = 69$
[۳.۶.۷۲]	$\frac{f(70) - f(0)}{70 - 0} = \frac{4900 - 0}{70 - 0} = 70$	$\frac{f(70) - f(0)}{70 - 0} = \frac{4900 - 0}{70 - 0} = 70$
[۳.۶.۷۳]	$\frac{f(71) - f(0)}{71 - 0} = \frac{5041 - 0}{71 - 0} = 71$	$\frac{f(71) - f(0)}{71 - 0} = \frac{5041 - 0}{71 - 0} = 71$
[۳.۶.۷۴]	$\frac{f(72) - f(0)}{72 - 0} = \frac{5184 - 0}{72 - 0} = 72$	$\frac{f(72) - f(0)}{72 - 0} = \frac{5184 - 0}{72 - 0} = 72$
[۳.۶.۷۵]	$\frac{f(73) - f(0)}{73 - 0} = \frac{5329 - 0}{73 - 0} = 73$	$\frac{f(73) - f(0)}{73 - 0} = \frac{5329 - 0}{73 - 0} = 73$
[۳.۶.۷۶]	$\frac{f(74) - f(0)}{74 - 0} = \frac{5476 - 0}{74 - 0} = 74$	$\frac{f(74) - f(0)}{74 - 0} = \frac{5476 - 0}{74 - 0} = 74$
[۳.۶.۷۷]	$\frac{f(75) - f(0)}{75 - 0} = \frac{5625 - 0}{75 - 0} = 75$	$\frac{f(75) - f(0)}{75 - 0} = \frac{5625 - 0}{75 - 0} = 75$
[۳.۶.۷۸]	$\frac{f(76) - f(0)}{76 - 0} = \frac{5776 - 0}{76 - 0} = 76$	$\frac{f(76) - f(0)}{76 - 0} = \frac{5776 - 0}{76 - 0} = 76$
[۳.۶.۷۹]	$\frac{f(77) - f(0)}{77 - 0} = \frac{5929 - 0}{77 - 0} = 77$	$\frac{f(77) - f(0)}{77 - 0} = \frac{5929 - 0}{77 - 0} = 77$
[۳.۶.۸۰]	$\frac{f(78) - f(0)}{78 - 0} = \frac{6084 - 0}{78 - 0} = 78$	$\frac{f(78) - f(0)}{78 - 0} = \frac{6084 - 0}{78 - 0} = 78$
[۳.۶.۸۱]	$\frac{f(79) - f(0)}{79 - 0} = \frac{6241 - 0}{79 - 0} = 79$	$\frac{f(79) - f(0)}{79 - 0} = \frac{6241 - 0}{79 - 0} = 79$
[۳.۶.۸۲]	$\frac{f(80) - f(0)}{80 - 0} = \frac{6400 - 0}{80 - 0} = 80$	$\frac{f(80) - f(0)}{80 - 0} = \frac{6400 - 0}{80 - 0} = 80$
[۳.۶.۸۳]	$\frac{f(81) - f(0)}{81 - 0} = \frac{6561 - 0}{81 - 0} = 81$	$\frac{f(81) - f(0)}{81 - 0} = \frac{6561 - 0}{81 - 0} = 81$
[۳.۶.۸۴]	$\frac{f(82) - f(0)}{82 - 0} = \frac{6724 - 0}{82 - 0} = 82$	$\frac{f(82) - f(0)}{82 - 0} = \frac{6724 - 0}{82 - 0} = 82$
[۳.۶.۸۵]	$\frac{f(83) - f(0)}{83 - 0} = \frac{6889 - 0}{83 - 0} = 83$	$\frac{f(83) - f(0)}{83 - 0} = \frac{6889 - 0}{83 - 0} = 83$
[۳.۶.۸۶]	$\frac{f(84) - f(0)}{84 - 0} = \frac{7056 - 0}{84 - 0} = 84$	$\frac{f(84) - f(0)}{84 - 0} = \frac{7056 - 0}{84 - 0} = 84$
[۳.۶.۸۷]	$\frac{f(85) - f(0)}{85 - 0} = \frac{7225 - 0}{85 - 0} = 85$	$\frac{f(85) - f(0)}{85 - 0} = \frac{7225 - 0}{85 - 0} = 85$
[۳.۶.۸۸]	$\frac{f(86) - f(0)}{86 - 0} = \frac{7396 - 0}{86 - 0} = 86$	$\frac{f(86) - f(0)}{86 - 0} = \frac{7396 - 0}{86 - 0} = 86$
[۳.۶.۸۹]	$\frac{f(87) - f(0)}{87 - 0} = \frac{7569 - 0}{87 - 0} = 87$	$\frac{f(87) - f(0)}{87 - 0} = \frac{7569 - 0}{87 - 0} = 87$
[۳.۶.۹۰]	$\frac{f(88) - f(0)}{88 - 0} = \frac{7744 - 0}{88 - 0} = 88$	$\frac{f(88) - f(0)}{88 - 0} = \frac{7744 - 0}{88 - 0} = 88$
[۳.۶.۹۱]	$\frac{f(89) - f(0)}{89 - 0} = \frac{7921 - 0}{89 - 0} = 89$	$\frac{f(89) - f(0)}{89 - 0} = \frac{7921 - 0}{89 - 0} = 89$
[۳.۶.۹۲]	$\frac{f(90) - f(0)}{90 - 0} = \frac{8100 - 0}{90 - 0} = 90$	$\frac{f(90) - f(0)}{90 - 0} = \frac{8100 - 0}{90 - 0} = 90$
[۳.۶.۹۳]	$\frac{f(91) - f(0)}{91 - 0} = \frac{8281 - 0}{91 - 0} = 91$	$\frac{f(91) - f(0)}{91 - 0} = \frac{8281 - 0}{91 - 0} = 91$
[۳.۶.۹۴]	$\frac{f(92) - f(0)}{92 - 0} = \frac{8464 - 0}{92 - 0} = 92$	$\frac{f(92) - f(0)}{92 - 0} = \frac{8464 - 0}{92 - 0} = 92$
[۳.۶.۹۵]		

شکل ۹. نمایه‌های عددی، نموداری و ضابطه‌ای کتاب حسابان ۲ (M12-4، ۱۴۰۲، ص ۷۷-۷۶).

جدول ۷. نمایه مشتق در یک نقطه را در تمام کتاب‌های درسی نشان می‌دهد.

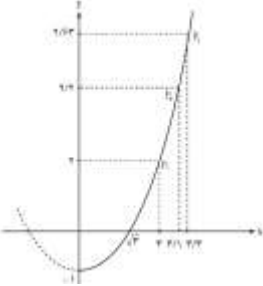
جدول ۷. نمایه مشتق در یک نقطه در کتاب‌های درسی رشته ریاضی ۴۵ سال اخیر کشور ایران

کتاب‌های رشته ریاضی			
نمایه			نام کتاب
نمایه نموداری	نمایه ضابطه‌ای	نمایه عددی	
x	$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$	x	M11-1
	x	x	M12-1
x	وقتی $h$ به صفر میل می‌کند، آنگاه داریم: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{4/9[(2+h)^2 - 4]}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 4/9[4+h] = 19/6 \text{ m/s}$	x	M11-2
	$V = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(a+h) - S(a)}{h}$ S: مسافت V: سرعت	x	M12-2
x	وقتی $h$ به صفر میل می‌کند، آنگاه داریم: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{4/9[(2+h)^2 - 4]}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 4/9[4+h] = 19/6 \text{ m/s}$	x	M11-3

<p style="text-align: center;"><b>x</b></p>	<p>تعریف خط مماس: اگر <math>f</math> بارزاً بازی نامال در تعریف شده و حد زیر</p> $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} = m$ <p>موجود باشد، آنگاه خطی که از نقطه <math>(a, f(a))</math> گذشته و به نسبت <math>m</math> می‌باشد، خط مماس بر نمودار <math>f</math> در نقطه <math>(a, f(a))</math> نامیده می‌شود.</p>	<p style="text-align: center;"><b>x</b></p> <p>M12-3</p>
	$\text{شیب خط مماس} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$	<p style="text-align: center;"><b>x</b></p> <p>M11-4</p>
<p style="text-align: center;">✓</p>	<p style="text-align: center;">✓</p>	<p style="text-align: center;">✓</p> <p>M12-4</p>

نتایج جدول ۷ نشان می‌دهد که هیچ کدام‌ها به جز M12-4 نمایه عددی ندارند. کتاب M12-2 و M11-4 از هر دو نمایه ضابطه‌ای و نموداری برای معرفی مشتق در یک نقطه استفاده کردند. کتاب M12-4 دارای هر سه نمایه می‌باشد.

جدول ۸. نمایه مشتق در یک نقطه در کتاب‌های درسی رشته تجربی ۴۵ سال اخیر کشور ایران

کتاب‌های رشته تجربی			نام کتاب																																																																																
نمایه																																																																																			
نمایه نموداری	نمایه ضابطه‌ای	نمایه عددی																																																																																	
<b>x</b>	اگر حد $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ وقتی $\Delta x$ به صفر میل کند	<b>x</b>	E11-1																																																																																
<b>x</b>	اگر نسبت $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ وقتی $\Delta x$ به صفر میل می‌کند، دارای حدی باشد.	<b>x</b>	E12-1																																																																																
	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{3} = 2$	<table border="1" data-bbox="761 1304 1077 1487"> <tr> <td>۱</td> <td>۲</td> <td>۳</td> <td>۴</td> <td>۵</td> <td>۶</td> <td>۷</td> <td>۸</td> </tr> <tr> <td>۱۱</td> <td>۱۲</td> <td>۱۳</td> <td>۱۴</td> <td>۱۵</td> <td>۱۶</td> <td>۱۷</td> <td>۱۸</td> </tr> <tr> <td>۲۱</td> <td>۲۲</td> <td>۲۳</td> <td>۲۴</td> <td>۲۵</td> <td>۲۶</td> <td>۲۷</td> <td>۲۸</td> </tr> <tr> <td>۳۱</td> <td>۳۲</td> <td>۳۳</td> <td>۳۴</td> <td>۳۵</td> <td>۳۶</td> <td>۳۷</td> <td>۳۸</td> </tr> <tr> <td>۴۱</td> <td>۴۲</td> <td>۴۳</td> <td>۴۴</td> <td>۴۵</td> <td>۴۶</td> <td>۴۷</td> <td>۴۸</td> </tr> <tr> <td>۵۱</td> <td>۵۲</td> <td>۵۳</td> <td>۵۴</td> <td>۵۵</td> <td>۵۶</td> <td>۵۷</td> <td>۵۸</td> </tr> <tr> <td>۶۱</td> <td>۶۲</td> <td>۶۳</td> <td>۶۴</td> <td>۶۵</td> <td>۶۶</td> <td>۶۷</td> <td>۶۸</td> </tr> <tr> <td>۷۱</td> <td>۷۲</td> <td>۷۳</td> <td>۷۴</td> <td>۷۵</td> <td>۷۶</td> <td>۷۷</td> <td>۷۸</td> </tr> <tr> <td>۸۱</td> <td>۸۲</td> <td>۸۳</td> <td>۸۴</td> <td>۸۵</td> <td>۸۶</td> <td>۸۷</td> <td>۸۸</td> </tr> <tr> <td>۹۱</td> <td>۹۲</td> <td>۹۳</td> <td>۹۴</td> <td>۹۵</td> <td>۹۶</td> <td>۹۷</td> <td>۹۸</td> </tr> </table>	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۳۱	۳۲	۳۳	۳۴	۳۵	۳۶	۳۷	۳۸	۴۱	۴۲	۴۳	۴۴	۴۵	۴۶	۴۷	۴۸	۵۱	۵۲	۵۳	۵۴	۵۵	۵۶	۵۷	۵۸	۶۱	۶۲	۶۳	۶۴	۶۵	۶۶	۶۷	۶۸	۷۱	۷۲	۷۳	۷۴	۷۵	۷۶	۷۷	۷۸	۸۱	۸۲	۸۳	۸۴	۸۵	۸۶	۸۷	۸۸	۹۱	۹۲	۹۳	۹۴	۹۵	۹۶	۹۷	۹۸	E11-2
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸																																																																												
۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸																																																																												
۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸																																																																												
۳۱	۳۲	۳۳	۳۴	۳۵	۳۶	۳۷	۳۸																																																																												
۴۱	۴۲	۴۳	۴۴	۴۵	۴۶	۴۷	۴۸																																																																												
۵۱	۵۲	۵۳	۵۴	۵۵	۵۶	۵۷	۵۸																																																																												
۶۱	۶۲	۶۳	۶۴	۶۵	۶۶	۶۷	۶۸																																																																												
۷۱	۷۲	۷۳	۷۴	۷۵	۷۶	۷۷	۷۸																																																																												
۸۱	۸۲	۸۳	۸۴	۸۵	۸۶	۸۷	۸۸																																																																												
۹۱	۹۲	۹۳	۹۴	۹۵	۹۶	۹۷	۹۸																																																																												

	x	x	E12-2
✓	✓	✓	E11-3
✓	✓	✓	E12-3

با توجه به جدول ۸، کتاب‌های ریاضی E11-2، E11-3 و E12-3 هر سه نمایه را دارا می‌باشند و مابقی کتاب‌ها فقط دارای یک نمایه بودند.

#### ۴.۴. نماد (مشتق در یک نقطه خاص)

سومین بخش از چارچوب نشانه‌شناسی پیرس نماد است. در نهایت، مشتق یک تابع  $f$  در یک نقطه  $a$  در دامنه آن در شکل ۱۰ تعریف شده است.

شیب خط مماس بر منحنی  $f$  در نقطه  $A(a, f(a))$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A \text{ شیب خط مماس بر منحنی در نقطه } = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

به شرط آنکه این حد موجود و منتهای باشد.

حد بالا را (در صورت وجود) مشتق تابع  $f$  در نقطه  $a$  می‌نامند و با  $f'(a)$  نمایش می‌دهند، یعنی:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

#### شکل ۱۰. تعریف مشتق در یک نقطه (M12-4، ۱۴۰۲، ص ۷۷)

این تعریف به خودی خود یک نماد است، زیرا به یک قانون قراردادی شناخته شده اشاره می‌کند. این نماد از طریق اتصال علامت‌هایی تشکیل می‌شود که در این فصل ارائه شده است. ابزار علامت  $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  در این حالت نمادی است که سایر ابزار علامت‌ها را که به نحوی به مفهوم مشتق در سراسر فصل مشتق اشاره می‌کند، گرد هم می‌آورد.

در تحلیل ما، نشانه مشتق به عنوان نماد در تمام کتاب‌های ریاضی مورد مطالعه وجود داشت. دو ویژگی دیگر مشتق تابع در یک نقطه در کتاب ارائه شده است. اولاً، همانطور که قبلاً اشاره کردیم، مؤلفان تا قبل از معرفی تعریف مشتق، شیب یک خط مماس را تعریف کردند. پس از آن

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

تعریف شد. مؤلفان همچنین خط مماس بر  $f$  در نقطه  $(a, f(a))$

را مشخص می‌کنند، همانطور که در شکل ۱۱ نشان داده شده است.

می‌توان استنباط کرد که نمادهای  $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  و  $m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  با

نشانه‌های دیگر در شیء ریاضی مشتق تابع  $f$  در یک نقطه مشخص، متصل می‌شوند. در حقیقت، آن‌ها با شمایل، «خط مماس  $y = f(x)$  در نقطه  $(a, f(a))$ ، خطی است که از  $(a, f(a))$  می‌گذرد و شیب آن  $f'(a)$  است، همان مشتق در  $a$ ، مرتبط هستند»، و با ابزار علامت‌نمایه‌ای که مثال آن در شکل ۱۱ نشان داده شده است، معرفی شده‌اند.

مثال: معادله خط مماس بر منحنی تابع  $f(x) = -x^2 + 1$  در نقطه  $A(2, f(2))$  واقع بر نمودار تابع بنویسید.

راه حل: با توجه به آنچه که در فعالیت قبل مشاهده شد:

$f'(2) = 6 =$  شیب خط مماس در نقطه  $A$

$A(2, f(2)) = (2, 16)$

$y - 16 = 6(x - 2) \Rightarrow y = 6x + 4$

#### شکل ۱۱. مثالی از یافتن خط مماس (M12-4، ۱۴۰۲، ص ۷۸)

یکی دیگر از ویژگی‌های مفهوم مشتق در نقطه که می‌خواهیم به آن اشاره کنیم نیز در درس ۳ ذکر شده است. خواهیم دید که می‌توان آن را به عنوان آهنگ تغییر تفسیر کرد. مجدداً، با بازگشت به بخش‌های قبلی کتاب، اتصالات میان سرعت متوسط، آهنگ لحظه‌ای تغییر و مشتق، مطابق شکل ۱۲ ایجاد می‌شود.

بطور کلی آهنگ متوسط تغییر یک تابع را در بازه‌ای مانند  $[a, a+h]$  به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر تابع } f \text{ در بازه } [a, a+h] = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

همچنین آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع  $f$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع } f \text{ در نقطه } a = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

آهنگ متوسط تغییر با شیب خط لایحه و آهنگ لحظه‌ای تغییر با مقدار مشتق و شیب خط مماس در آن نقطه برابرند.

#### شکل ۱۲. مشتق و آهنگ تغییر (M12-4، ۱۴۰۲، ص ۱۰۴)

معرفی مفهوم مشتق، که در کتاب به شیوه‌ای عملیاتی نشان داده شده است، بیان می‌کند که شمایل، نمایه و نماد، ابزار علامت‌های جداگانه یا مستقل که اشاره به مشتق می‌کنند، نیستند. هر ابزار علامت به خودی خود به برای توصیف مفهوم مشتق در یک نقطه مشخص، کافی نیست. در عوض، به نظر می‌رسد آن‌چه را که آرزارلو و همکاران بسته نشانه‌شناسی<sup>۱</sup> (Arzarello et al., 2009) نامیدند، بسیار ضروری

<sup>۱</sup> Semiotic bundle

است. در مورد مفهوم‌سازی مشتق، این بسته نشانه‌شناسی از ابزار علامت‌های ریاضی مانند نمودارها، فرمول‌ها، عبارات زبانی ساخته شده است که در نشانه‌شناسی پیرسی می‌تواند به عنوان شمایل، نمایه و نماد شناخته شود.

از نقطه نظر نشانه‌شناسی، اتصالات بین نماد  $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ ، تفسیر مقدار  $f'(a)$

به عنوان شیب خط مماس به نمودار  $f$  در نقطه  $(a, f(a))$  و نشانه این مقدار به عنوان آهنگ تغییر، عناصر مختلفی از بسته نشانه‌شناسی است که با هم برای ساخت معنای مفهوم مشتق عمل می‌کنند. اگر ما به روابط بین علامت‌هایی که به مفهوم مشتق اشاره شده در کتاب درسی نگاه کنیم، درک اهمیت دانش قبلی در مورد شیب، حد، خط مماس، خط قاطع و آهنگ تغییر برای دانش‌آموزان برای تولید دانش در مورد مفهوم مشتق، ضروری است.

### بحث و نتیجه گیری

در این مطالعه از دیدگاه نشانه‌شناسی پیرس، مفهوم مشتق در یک نقطه خاص در کتاب‌های درسی ریاضی ۴۵ سال اخیر کشور ایران تحلیل شده است. با توجه به بررسی کتاب‌های درسی، نخستین ارائه مؤلفان نشان دهنده یک عنصر ضروری از مفهوم مشتق است که باید ساخته شود و آن «مشتق به عنوان یک حد» است. با در نظر گرفتن ابزار علامت شمایی، ابتدا جنبه‌های موضوعی مفهوم مشتق معرفی شده است. این مقدمه با ارائه شیب‌های خطوط قاطع و خط مماس آغاز می‌شوند. تعاریف را می‌توان به عنوان ابزار علامت نمایه‌ای، در یک مفهوم مشتق در نظر گرفت. تعریف مشتق به نوبه خود دارای ویژگی‌های ابزار علامت نمادین است. همانطور که اوتی (Otte, 2008) اشاره می‌کند، در مجموعه سه‌گانه که به ارتباط بین شیء و ابزار علامت اشاره می‌کنند؛ نماد، فرآیند تعامل چرخه‌ای بین عناصر نمایه و شمایل است. فرایند مفهوم‌سازی و ساخت معنای مشتق می‌تواند به عنوان یک فرایند بازگشتی در نظر گرفته شود که توسط انواع نشانه‌های ریاضی، شمایل، نمایه و نماد شناخته شده است؛ همانطور که توسط (Kadunz, 2016) اشاره شده است. هنگامی که علامت نمادین برای تعریف مشتق  $f$  در یک نقطه ارائه شده است، تفسیر هندسی آن به عنوان شیب خط مماس بر روی نمودار در نقطه  $(a, f(a))$  نیز نشان داده شده است. تعاریف آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر در ساختن مفهوم مشتق در یک نقطه و اتصال آن به دنیای واقعی نیز استفاده می‌شوند.

با توجه به این ساختار، شیوه تکراری مؤلفان، ارائه ایده‌هایی است که ممکن است دانش‌آموزان ارتباط بین دانش قبلی خود را با ایده‌های جدید ریاضی ایجاد کنند. در حقیقت چندین بار، مؤلفان به تعاریف یا نمونه‌هایی از بخش‌های قبلی در کتاب یا کتاب‌های دیگر اشاره می‌کنند تا از آن‌ها برای ساختن مفهوم

مشتق استفاده کنند. در این راستا، کتاب درسی حسابان ۲ (۱۴۰۲) و ریاضی ۳ (۱۴۰۲) با توصیه‌هایی مطابقت دارد که بر این نکته تأکید دارد که مواد آموزشی مانند کتاب‌های درسی باید به دانش قبلی رجوع کنند. این دانش برای تفسیر نشانه‌ها و استفاده از نشانه‌ها برای تولید دانش، یعنی تمایز اشیاء، ساختار تجربیات، سازماندهی تعامل و غیره لازم هستند (Hoffmann & Roth, 2007). مفهوم مشتق یک تابع شامل دو ایده متفاوت است. اول، تعریف مشتق در یک نقطه و سپس تعریف تابع جدید،  $f'$ ، مشتق تابع  $f$ . این مفهوم مشتق از دو جنبه، موضعی و عمومی تعریف باید مشخص شوند. به دلیل محدودیت، نویسندگان این پژوهش فقط مفهوم موضعی مشتق را بررسی کرده‌اند. مؤلفان کتاب درسی به دانش‌آموزان کمک می‌کنند تا مشکل تفاوت بین این جنبه‌های مفهوم مشتق را بررسی کنند. دو تعریف،  $f'(a)$  و  $f'(x)$  در کنار هم قرار می‌گیرند، تا دانش‌آموز متوجه شود که این‌ها ویژگی‌های متفاوتی از تابع هستند؛ مشتق  $f$  در نقطه  $(a, f(a))$  و مشتق‌پذیری تابع  $f$ . بنابراین، از یک سو می‌توانیم از کتاب به عنوان یک ماده درسی برای خودآموزی فکر کنیم، از سوی دیگر، باید توجه داشته باشیم که دانش‌آموزان قبلاً بدانند که چگونه از کتاب در این شرایط استفاده کنند، همانطور که کیل پاتریک (Kilpatrick, 2014) اشاره کرده است. برخی مطالعات به طور خاص نشان داده‌اند که شهودی‌سازی می‌تواند دانش‌آموزان را در درک ارتباط بین تابع و مشتق آن در حوزه نموداری یاری دهد، همانطور که توسط دی آلمیدا و سیلوا (Almida & Silva, 2018) اشاره شده است. استفاده از منابع تکنولوژی برای بازنمایی‌های نموداری توابع و مشتق آن‌ها می‌تواند به غلبه بر این شکاف کمک کند. به این ترتیب، کتاب‌های درسی که تجزیه و تحلیل شده است، خوانندگان را به استفاده از ماشین حساب‌های گرافیکی و رایانه‌ها و نرم‌افزارها (مانند دسموس و جئوجبرا) برای ساخت نمودارهای توابع توصیه می‌کنند، که می‌تواند به عنوان ابزار علامت عمل کنند و نقش داربست‌زنی معلم برای شاگرد را تا حدودی ایفا کنند. البته به دلیل برخی مشکلاتی که وجود داشت، توسط مؤلفین به طور مستقیم اشاره نشده است. استفاده از بسته نرم‌افزاری نشانه‌شناسی که توسط آرزارلو و همکاران (Arzarello et al., 2009) برای مفهوم‌سازی مشتق بیان شده است، به کارگیری آن در کتاب‌های درسی، شامل بازنمایی‌های نموداری به عنوان یک ابزار علامت و به عنوان یک شیء ریاضی ضرورت دارد. با این وجود، یک شیء ریاضی از تمام ابزار علامت‌های آن متمایز نیست، اما با هیچ کدام از آن‌ها (Otte, 2008) اشتباه گرفته نمی‌شود. به این ترتیب، انواع شمایل، نمایه و نماد که در کتاب اشاره شده ممکن است از معناسازی دانش‌آموزان در مورد مفهوم مشتق پشتیبانی کنند. این تجزیه و تحلیل به ما اجازه می‌دهد تا اشاره کنیم که ابزار علامت مفهوم مشتق، می‌تواند شمایی، نمایه‌ای یا نمادین باشد. این نشانه‌ها، نشانه‌های متقابلاً منحصر به فرد نیست، اما آن‌ها به گونه‌ای در هم آمیخته شده‌اند که ما می‌توانیم شمایی را در نمایه‌ای و نمایه‌ای در نمادین شناسایی کنیم. همانطور که شانزلودولف و زلویگر (Sáenz-

(Ludlow, & Zellweger, 2016) اشاره می‌کند، نشانه‌ها بدون در نظر گرفتن تفسیرکننده، معنای ذاتی دارند. با این وجود، با توجه به علائم ریاضی ارائه شده در کتاب درسی، بهتر است که در نظر داشته باشیم که تمایز در علامت‌های ریاضی ممکن است با این واقعیت پیچیده‌تر شود که افراد مختلف می‌توانند همان رابطه را بین یک ابزار علامت و خود شیء به گونه‌ای دسته‌بندی کنند که بر اساس تفسیر آن‌ها شمایی، نمایه‌ای یا نمادین باشند. در شیوه، تفاوت جزئی است زیرا آن‌ها به تفسیر یادگیرنده بستگی دارد (Presmeg et al., 2016, p. 7).

خلاصه بررسی‌های کتاب‌های درسی ریاضی ۴۵ سال کشور ایران بر اساس نشانه‌شناسی پیرس به این صورت است: در شمایل حدی مشتق در یک نقطه، کتاب‌های حساب دیفرانسیل و انتگرال (۲۰۱۳۹۰)، ریاضی ۳ (۱۴۰۲) و حسابان ۲ (۱۴۰۲) هم دارای شمایل نموداری یا تصویری و هم استعاره‌ای بودند. در نمایه مشتق در یک نقطه، کتاب‌های ریاضی ۳ سوم تجربی (۱۳۹۵)، ریاضی ۳ (۱۴۰۲) و حسابان ۲ (۱۴۰۲) هر سه نمایه عددی، ضابطه‌ای و نموداری را دارا بودند. در درک مشتق‌ناپذیری یک تابع، کتاب‌های جبر و آنالیز (۱۳۷۲)، نشانه‌های نمایه و نماد را دارا بودند و حساب دیفرانسیل و انتگرال (۱۳۹۶) دارای شمایل و نماد و کتاب‌های ریاضی ۳ (۱۴۰۲) و حسابان ۲ (۱۴۰۲) دارای شمایل و نمایه بودند. لازم به ذکر است تحلیل صورت گرفته فقط بر اساس نظریه نشانه‌شناسی پیرس است و به منزله برتری یک کتاب نمی‌باشد. با استفاده از لنز نظری یکی از مجموعه‌های سه‌گانه پیرس درباره بررسی ارائه مفهوم مشتق در کتاب درسی، ما می‌توانیم ابزار علامت را در رابطه با این مفهوم مشخص کنیم. نتیجه می‌گیریم که کتاب درسی قادر به توانمندسازی دانش‌آموزان برای مفهوم‌سازی مشتق در یک نقطه می‌باشد. بایستی توجه داشت که کل مفهوم سازی مشتق کتاب حسابان ۲ (۱۴۰۲) در ۴۰ صفحه صورت گرفته است و مسئله حجم مطالب نیز مد نظر تمام مؤلفان محترم بوده است. مطلب دیگری که حائز اهمیت است ورود نشانه شمایی از نوع تصویری QR در کتاب‌های درسی از سال ۱۴۰۲ می‌باشد. تحقیقات کوروهلو و پهلوان (Çoruhlu & Pehlevan, 2021) نیز نشان داده است؛ توسط این نشانه در ابتدای هر بخش کتاب‌های درسی می‌توان به مفهوم‌سازی موضوع و معناداری آن برای شاگردان کمک کرد. کتاب‌های حسابان ۲ (۱۴۰۲) و ریاضی ۳ (۱۴۰۲) نیز در مبحث مشتق این ویژگی مهم نشانه‌شناسی را دارا بودند.

## حامی مالی

هزینه‌های مطالب حاضر توسط نویسنده مقاله تأمین شد.

## تعارض منافع

بنابراظهار نویسنده مقاله حاضر فاقد هرگونه تعارض منافع بوده است.

## References

- Adibi, I., Modgham, M., Firouznia, A., Taheri, H. & Hassan Zadeh Makoui, A. (1993). *Algebra and Trigonometry for Year 11 in experimental sciences major*. Secondary high school. Organization for Educational Research and Planning, Ministry of Education, Tehran (Iran), Printing and Publishing Company of Iran Textbooks. [in Persian]
- Ahmadrash, R., and Mostafazadeh, E. (2019). Analysis of Social Studies Curriculum in the First Three Years of Secondary School in Consideration of Multicultural Education Components. *Journal of Research in Teaching*, 7(4), 24-48. [In Persian]
- Almeida, L. M. W. D., & Silva, K. A. P. D. (2017). A ação dos signos e o conhecimento dos alunos em atividades de Modelagem Matemática. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 31, 202–219. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a10>
- Artigue, M., Batanero, C. & Kent, P. (2007). *Mathematics thinking and learning at post-secondary level*. Information Age Publishing.
- Arzarello, F., Paola, D., Robutti, O., & Sabena, C. (2009). Gestures as semiotic resources in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 70(2), 97–109. <https://doi.org/10.1007/s10649-008-9163-z>
- Asjadi, G.R., Qaragozlu, J.A., Mousavi, H.A. & Vaezian, M.A. (1993). *Algebra and Analysis for Year 12 in mathematical-physics major*. Secondary high school. Organization for Educational Research and Planning, Ministry of Education, Tehran (Iran), Printing and Publishing Company of Iran Textbooks. [in Persian]
- Barbin, E. (2010). Evolving geometric proofs in the seventeenth century: From icons to symbols. In *Explanation and Proof in Mathematics* (pp. 237–251). Springer, Boston, MA. [https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0576-5\\_16](https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0576-5_16)
- Bender, P., & Schreiber, A. (1985). *Operative Genese der Geometrie*. Wien: Hölder-Pichler-Tempsky, B. G. Teubner.

- Bijan Zadeh, M.H., Alamian, V. & Farshadi, G.A (2017). *Calculus, Year 12 in mathematical-physics major*. Secondary high school. Organization for Educational Research and Planning, Ministry of Education, Tehran (Iran), Printing and Publishing Company of Iran Textbooks. [in Persian]
- Bijan Zadeh, M.H., Farshadi, G.A. & Ilkhanipur, Y. (2004). *Calculus I & II for Year 11 in mathematical-physics major*. Secondary high school. Organization for Educational Research and Planning, Ministry of Education, Tehran (Iran), Printing and Publishing Company of Iran Textbooks. [in Persian]
- Bijan Zadeh, M.H., Farshadi, G.A. & Ilkhanipur, Y. (2009). *Calculus for Year 11 in mathematical-physics major*. Secondary high school. Organization for Educational Research and Planning, Ministry of Education, Tehran (Iran), Printing and Publishing Company of Iran Textbooks. [in Persian]
- Bijan Zadeh, M.H., Pasha, E. & Yohennai, K. (2011). *General Mathematics I and II for Year 12 in experimental sciences major*. Secondary high school. Organization for Educational Research and Planning, Ministry of Education, Tehran (Iran), Printing and Publishing Company of Iran Textbooks. [in Persian]
- Biza, I. (2021). The discursive footprint of learning across mathematical domains: The case of the tangent line. *The Journal of Mathematical Behavior*, 62, 100870. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2021.100870>
- Çoruhlu, T. S., & Pehlevan, M. (2021). The Effectiveness of the Science Experimental Guidebook on the Conceptual Understanding of Students with Learning Disabilities. *Journal of Science Learning*, 4(3), 230–243.
- Davarzani, M., Reyhani, E., Seyed Salehi, M.R., Taheri Tanjani, M.T., Ghorbani, M. & Minbashian, H. (2023). *Calculus II for Year 12 in mathematical-physics major*. Secondary high school. Organization for Educational Research and Planning, Ministry of Education, Tehran (Iran), Printing and Publishing Company of Iran Textbooks. [in Persian]
- Davis, G. E., & McGowen, M. A. (2001, July). *Embodied objects and the signs of mathematics*. In 25th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Utrecht, The Netherlands.

- De Almeida, L. M. W., & da Silva, K. A. P. (2018). A semiotic interpretation of the derivative concept in a textbook. *ZDM*, 50(5), 881–892. <https://doi.org/10.1007/s11858-018-0975-8>
- Eslah Pazir, B., Boroujerdian, N., Reyhani, E., Taheri Tanjani, M.T. & Alamian, V. (2016). *Calculus for Year 11 in experimental major*. Secondary high school. Organization for Educational Research and Planning, Ministry of Education, Tehran (Iran), Printing and Publishing Company of Iran Textbooks. [in Persian]
- Feudel, F. (2019). *Die Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler*. Wiesbaden: Springer.
- González-Martín, A. S., Nardi, E., & Biza, I. (2011). Conceptually driven and visually rich tasks in texts and teaching practice: the case of infinite series. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 42(5), 565–589. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2011.562310>
- Haghjoo, S., & Reyhani, E. (2019). A Study on Performance of Secondary School Students in Solving a Spatial Ability Task Based on SOLO Theory. *The Technology of Education Journal (TEJ)*, 13(3), 484–498. <https://doi.org/10.22061/JTE.2018.3687.1918>
- Haghjoo, S., & Reyhani, E. (2021). Undergraduate basic sciences and engineering students' understanding of the concept of derivative. *JRAMathEdu (Journal of Research and Advances in Mathematics Education)*, 6(4), 277–298. <https://doi.org/10.23917/jramathedu.v6i4.14093>
- Haghjoo, S., & Reyhani, E. (2022). Investigating the Frameworks of Students' Understanding of the Relationship between the Derivative and Antiderivative Function graphs: A Qualitative Meta-analysis. *New Educational Approaches*, 17(1), 59–84. [in Persian]
- Haghjoo, S., Radmehr, F., & Reyhani, E. (2023). Analyzing the written discourse in calculus textbooks over 42 years: the case of primary objects, concrete discursive objects, and a realization tree of the derivative at a point. *Educational Studies in Mathematics*, 112(1), 73–102.

- Haghjoo, S., Reyhani, E., & Kolahdouz, F. (2020). Evaluating the Understanding of the University Students (Basic Sciences and Engineering) about the Numerical Representation of the Average Rate of Change. *International Journal of Educational and Pedagogical Sciences*, 14(2), 111–121.
- Heidari Ghezalga, R., Rahimi, Z., Reyhani, E., Seyed Salehi, M.R., Komijani, A. & Minbashian, H. (2019). *Mathematics III for Year 12 in experimental sciences major*. Secondary high school. Organization for Educational Research and Planning, Ministry of Education, Tehran (Iran), Printing and Publishing Company of Iran Textbooks. [in Persian]
- Hesam al-Dini, M., Shahrastani, M.H., Sheikh, H. & Lotfi Dorabadian, M. (1993). *Mathematics for Year 12 in experimental sciences major*. Secondary high school. Organization for Educational Research and Planning, Ministry of Education, Tehran (Iran), Printing and Publishing Company of Iran Textbooks. [in Persian]
- Hoffmann, M. H. G., & Roth, W. M. (2007). The complementarity of a representational and an epistemological function of signs in scientific activity. *Semiotica*, 164(1), 1–24. <https://doi.org/10.1515/SEM.2007.021>
- Huntley, M. A., & Terrell, M. S. (2014). One-step and multi-step linear equations: a content analysis of five textbook series. *ZDM*, 46(5), 751-766.
- Jones, S. R., & Watson, K. L. (2018). Recommendations for a “target understanding” of the derivative concept for first-semester calculus teaching and learning. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 4(2), 199–227. <https://doi.org/10.1007/s40753-017-0057-2>
- Kadunz, G. (2016). Geometry, a means of argumentation. In A. Sáenz-Ludlow & G. Kadunz (Eds.), *Semiotics as a tool for learning mathematics: How to describe the construction, visualization, and communication of mathematical concepts* (pp. 25–42). Dordrecht: Sense Publishers.
- Kilpatrick, J. (2014). From clay tablet to computer tablet: The evolution of school mathematics textbooks. In K. Jones, C. Bokhove, G. Howson, & L. Fan (Eds.), *International Conference on Mathematics Textbook Research and*

- Development 2014 (ICMT-2014) (pp. 3–12). UK: University of Southampton.
- Krause, C. M. (2016). *The mathematics in our hands: How gestures contribute to constructing mathematical knowledge*. Springer.
- Lassiter, C. (2024). Reading the Signs: From Dyadic to Triadic Views for Identifying Experts. *Social Epistemology*, 38(1), 98–109.
- Mehdizadeh, R. S., reyhani, E., & haghjoo, S. (2023). Analysis of the dimensions of educational pragmatism in compiling the subject of math textbooks. *Research in Curriculum Planning*, 20(76), 99-118. doi: 10.30486/jsre.2023.1964293.2199. [in Persian]
- Mesa, V. (2010). Strategies for controlling the work in mathematics textbooks for introductory calculus. *Research in Collegiate Mathematics Education*, 16, 235–265.
- Morgan, C., & Sfard, A. (2016). Investigating changes in high-stakes mathematics examinations: A discursive approach. *Research in Mathematics Education*, 18(2), 92-119. <https://doi.org/10.1080/14794802.2016.1176596>
- Mulbar, U., Rahman, A., & Ahmar, A. (2017). Analysis of the ability in mathematical problem-solving based on SOLO taxonomy and cognitive style. *World Transactions on Engineering and Technology Education*, 15(1).
- Otte, M. (2008). The analytic/synthetic distinction and Peirce's conception of mathematics. In R. Fabbrichesi & S. Marietti (Eds.), *Semiotics and philosophy in Charles Sanders Peirce* (pp. 51–88). Cambridge: Scholars Publishing.
- Özgeldi, M., & Aydın, U. (2021). Identifying Competency Demands in Calculus Textbook Examples: the Case of Integrals. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 19(1), 171-191. <https://doi.org/10.1007/s10763-019-10046-9>
- Peirce, C. S. (1931–1958). *Collected Papers of Charles Sanders Peirce*, 8 volumes. Cambridge: Harvard University Press.
- Peirce, C. S. (1992–1998). *The Essential Peirce*, Selected Philosophical Writings, 2 volumes. Bloomington and Indianapolis: Indiana University Press.
- Peirce, C. S. (2005). *Semiotic: The collected papers*. São Paulo: Perspectiva.

- Presmeg, N. C. (2008). *Trigonometric connections through a Semiotic Lens*. In L. Radford, G. Schubring & F. Seeger (Eds.), *Semiotics in mathematics education: Epistemology, history, classroom, and culture* (pp. 103–119). Dordrecht: Sense Publishers.
- Presmeg, N., Radford, L., Roth, W. M., & Kadunz, G. (Eds.). (2018). *Signs of Signification: Semiotics in Mathematics Education Research*. Springer.
- Qaragozlu, J.A. & Vaezian, M.A. (1993). *Algebra for Year 11 in mathematical-physics major*. Secondary high school. Organization for Educational Research and Planning, Ministry of Education, Tehran (Iran), Printing and Publishing Company of Iran Textbooks. [in Persian]
- Rostami, M.H., Atoufi, A.H., Goodarzi, M. & Amiri, H.R. (2009). *Mathematics III for Year 11 in experimental sciences major*. Secondary high school. Organization for Educational Research and Planning, Ministry of Education, Tehran (Iran), Printing and Publishing Company of Iran Textbooks. [in Persian]
- Rostami, M.H., Atoufi, A.H., Goodarzi, M. & Amiri, H.R. (2016). *Mathematics III for Year 11 in experimental sciences major*. Secondary School. Organization for Educational Research and Planning, Ministry of Education, Tehran (Iran), Printing and Publishing Company of Iran Textbooks. [in Persian]
- Sáenz-Ludlow, A., & Kadunz, G. (2016). *Constructing knowledge seen as a semiotic activity*. In A. Sáenz-Ludlow & G. Kadunz (Eds.), *Semiotics as a tool for learning mathematics: How to describe the construction, visualization, and communication of mathematical concepts* (pp. 1–21). Dordrecht: Sense Publishers.
- Sáenz-Ludlow, A., & Zellweger, S. (2016). *Classroom mathematics activity when it is seen as an inter-intra double semiotic process of interpretation*. In A. Sáenz-Ludlow & G. Kadunz (Eds.), *Semiotics as a tool for learning mathematics: How to describe the construction, visualization, and communication of mathematical concepts* (pp. 43–66). Dordrecht: Sense Publishers.
- Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C., & Llinares, S. (2019). Relationships among prospective secondary mathematics teachers' skills of attending, interpreting,

- and responding to students' understanding. *Educational Studies in Mathematics*, 100(1), 83–99. <https://doi.org/10.1007/s10649-018-9855-y>
- Sarkhosh, S., Sadeghi, A., Faghih Aram, B., shabani, H., and Zabihi, R. (2021). Identify the Components and Elements of the Curriculum based on Developing Problem-Solving Skills in order to Provide an Optimal Model for Preschool. *Journal of Research in Teaching*, 9(1), 43–72. [In Persian]
- Tabatabaei, F., Abaspour, A., Rahimiyan, H., Ghayasinadoshen, S., and Elami, F. (2020). Meta-analysis on the Effect of Factors Influencing the Development of Entrepreneurs in the University (Case Study: Researches in Iran). *Journal of Research in Teaching*, 9(3), 146-172. [In Persian]
- Tabrizi, M. (2014). Qualitative content analysis from the perspective of analogical and inductive approaches. *Social Sciences*, 21(64), 105–138. doi: 10.22054/qjss.2014.344
- Telgini, M., Kherad Pajouh, F., Rejali, A. & Ghiasian, A. (2011). *Calculus I and II, Year 12 in mathematical-physics major*. Secondary high school. Organization for Educational Research and Planning, Ministry of Education, Tehran (Iran), Printing and Publishing Company of Iran Textbooks. [in Persian]
- Xiong, T., & Peng, Y. (2021). Representing culture in Chinese as a second language textbooks: A critical social semiotic approach. *Language, Culture and Curriculum*, 34(2), 163–182. <https://doi.org/10.1080/07908318.2020.1797079>
- Zandieh, M. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivative. *CBMS issues in mathematics education*, 8, 103–127.